BOSNA I HERCEGOVINA
FEDERACIJA BOSNE I HERCEGOVINE
SREDNJOBOSANSKI KANTON
MINISTARSTVO OBRAZOVANJA, NAUKE, KULTURE I SPORTA

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE – 2017

Mješovita srednja tehnička škola Travnik
Održano: 18.03.2017.

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA I RAZRED

1. Dati su polinomi $P(x) = x^3 - x + 3$ i $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, $x \epsilon Z$. Dokazati: 25 b
   a) polinom $P(x)$ je djeljiv sa 3,
   b) polinom $Q(x)$ nije djeljiv sa 3.

2. Tri očeva koraka duga su kao pet kćerkinih, ali dok otac učini 6 koraka njegova kćerka učini 7 koraka. Kćerka je već napravila 30 koraka kad je otac krenuo za njom. Nakon koliko koraka će je otac sustići? 23 b

3. Izračunati zbir svih cjelobrojnih rješenja nejednačine 24 b
$$|x| + |x - 2| < 2017.$$

4. Kružnica upisana u jednakokraki trougao čiji je ugao pri vrhu C 120^0 ima poluprečnik 3 dm. Izračunati površinu tog trougla. 28 b

Napomena: *Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta. Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.*

Mnogo uspjeha u radu!

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA II RAZRED

1. Za koje $a \epsilon R$ jednačina $\sqrt{x^2 - 1} = a - x$ ima rješenje? 28 b

2. Odstojanje centra opisane kružnice trougla od jedne stranice dva puta je manje od odstojanja ortocentra tog trougla od vrha ugla naspram te strane. 26 b

3. Data je jednačina $4x^2 - (3a + 1)x - a - 2 = 0$. Odrediti sve $a \epsilon R$ tako da za rješenja jednačine vrijedi 22 b
$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \geq \frac{40}{9}.$$

4. Naći sve kompleksne brojeve za koje vrijedi $|z - 2 + i| = 5 \ \wedge$ $Re\big(z \cdot (1 + i)\big) = 2$. 24 b

Napomena: *Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta. Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.*

Mnogo uspjeha u radu!

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA III RAZRED

1. Riješiti eksponencijalnu jednačinu — 20 b

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

2. Riješiti trigonometrijsku jednačinu — 24 b

$$sin^4 x + cos^4 x = sin2x$$

3. U jednakokrakom trouglu ΔABC je ugao između krakova $\sphericalangle ACB = 20^0$. Na kracima AC i BC date su redom tačke Q i P takve da je $\sphericalangle BAP = 50^0$ i $\sphericalangle ABQ = 60^0$. Izračunati mjeru ugla $\sphericalangle BQP$. — 30 b

4. Oko fokusa parabole $y^2 = 16x$ konstruisana je kružnica koja dodiruje direktrisu parabole. Odrediti jednačinu kružnice i ugao presjeka parabole i kružnice. — 26 b

Napomena: *Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta. Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.*

Mnogo uspjeha u radu!

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA IV RAZRED

1. Funkcija $f(x)$ zadovoljava uslov 22 b

$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

za sve $x \epsilon Z$. Ako je $f(1) = 2$, izračunati $f(2000)$.

2. Zbir prva tri člana geometrijskog niza je 91. Ako tim članovima dodamo redom $25, 27\ i\ 1$ dobit ćemo tri broja koja čine aritmetički niz. Odrediti sedmi član datog geometrijskog niza. 27 b

3. Ako je $n \geq 2$ prirodan broj dokazati da je $2^{2^n} - 1$ djeljiv sa 15. 25 b

4. Na veče indijanskih plemena došlo je 8 predstavnika: poglavice plemena Komanča, Sijuksa, Kajova, Crnih Nogu i tri predstavnika Apača – poglavica i dva istaknuta ratnika. Svi su ravnopravni i govore po jednom, jedan po jedan, u proizvoljnom redoslijedu, sa ovim izuzetkom: nijedan od ratnika Apača ne smije govoriti prije svog poglavice. Koliko ima različitih rasporeda govornika? 26 b

Napomena: *Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta. Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.*

Mnogo uspjeha u radu!

Moguća rješenja zadataka za I razred

1. a) $P(x) = x^3 - x + 3 = x(x^2 - 1) + 3 = (x - 1)x(x + 1) + 3.$ 25 b
Kako je $x \epsilon Z$, proizvod tri uzastopna cijela broja $(x - 1)x(x + 1)$ je djeljiv sa 3, pa je i polinom $P(x)$ djeljiv sa 3. **(10 b)**

b) Da bismo dokazali da polinom $Q(x)$ nije djeljiv sa 3, uzet ćemo da cijeli broj x ima jedan od tri oblika

$$x = 3k$$
$$x = 3k + 1$$
$$x = 3k + 2$$
$$k \epsilon Z. \ (\mathbf{2\ b})$$

I. $x = 3k$
$Q(x) = Q(3k) = (3k)^3 + (3k)^2 + 3k + 2 = 27k^3 + 9k^2 + 3k + 2 = 3k(9k^2 + 3k + 1) + 2$, a ovaj broj nije djeljiv sa 3. **(4b)**

II. $x = 3k + 1$
$Q(x) = Q(3k + 1) = (3k + 1)^3 + (3k + 1)^2 + (3k + 1) + 2 = (3k + 1)[(3k + 1)^2 + (3k + 1) + 1] + 2 = (3k + 1)(9k^2 + 6k + 1 + 3k + 1 + 1) + 2 = (3k + 1)(9k^2 + 9k + 3) + 2 = 3(3k + 1)(3k^2 + 3k + 1) + 2$, a ovaj broj nije djeljiv sa 3. **(4b)**

III. $x = 3k + 2$
$Q(x) = Q(3k + 2) = (3k + 2)^3 + (3k + 2)^2 + (3k + 2) + 2 = (3k + 2)[(3k + 2)^2 + (3k + 2) + 1] + 2 = (3k + 2)(9k^2 + 12k + 4 + 3k + 3) + 2 = (3k + 2)(9k^2 + 15k + 6 + 1) + 2 = (3k + 2)3(3k^2 + 5k + 2) + (3k + 2) + 2 = (3k + 2)3(3k^2 + 5k + 2) + 3(k + 1) + 1$, a ovaj broj nije djeljiv sa 3. **(5b)**

2. Neka otac načini x koraka do susreta sa kćerkom. Tada njegova kćerka za isto vrijeme načini $\frac{7}{6}x$ koraka **(4b)**. To znači da je njegova kćerka načinila $30 + \frac{7}{6}x$ koraka **(3b)**. Dužina koraka kćerke je $\frac{3}{5}$ dužine očevog koraka **(4b)**. Zato je **(8b)** 23 b

$$\frac{3}{5}\left(30 + \frac{7}{6}x\right) = x.$$

Rješenje jednačine je $x = 60$ koraka. **(4b)**

3. Kako je $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ i $|x - 2| = \begin{cases} x - 2, x \geq 2 \\ -(x - 2), x < 2 \end{cases}$ **(4b)** 24 b

to imamo slučajeve:

A. $x < 0$

$$-x - (x - 2) < 2017$$
$$-2x + 2 < 2017$$
$$-2x < 2015$$

$$x > \frac{-2015}{2}$$
$x\epsilon\{-1007, -1006, -1005, \ldots\ldots, -2, -1\}$ zbog $x\epsilon Z$. (1) **(5b)**

B. $x \in [0,2)$

$$x - (x - 2) < 2017$$
$$0 \cdot x + 2 < 2017$$
$$0 \cdot x < 2015$$
$x\epsilon\{0,1\}$ zbog $x\epsilon Z$. (2) **(5b)**

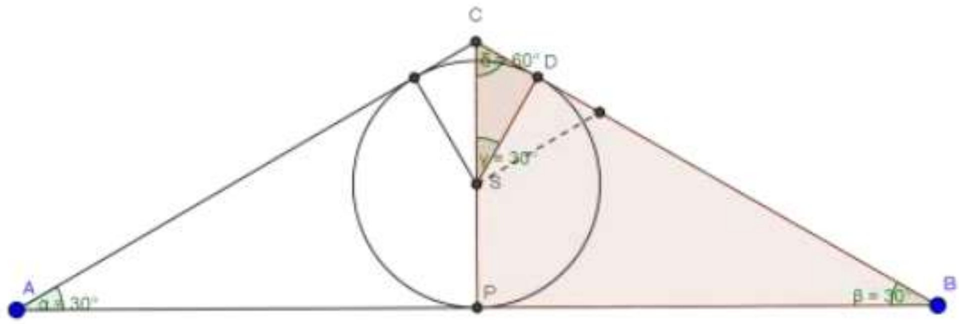
C. $x \geq 2$

$$x + x - 2 < 2017$$
$$2x < 2019$$
$$x < \frac{2019}{2}$$
$x\epsilon\{1009,1008,1007, \ldots ,3,2\}$ zbog $x\epsilon Z$. (3) **(5b)**

Traženi zbir rješenja (1), (2) i (3) iznosi $1009 + 1008 = 2017$. **(5b)**

4. Uz oznake kao na slici trougao CDS je polovina jednakostraničnog trougla stranice $x = \overline{CS}$. Zato je $r = \frac{x}{2}\sqrt{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$. **(11 b)** 28 b

Slika **(6 b).**



Označimo sa $a = \overline{AB}$, a neka je $h = r + x = 3 + 2\sqrt{3}$ visina trougla ABC. Očigledno je $\overline{AC} = \overline{BC} = 2h$. Trougao PBC je polovina jednakostraničnog pa je

$$\frac{a}{2} = \frac{2h}{2}\sqrt{3} \Longrightarrow a = 12 + 6\sqrt{3} \quad \textbf{(8b)}$$

Površina trougla je $P = \frac{ah}{2} = \left(36 + 21\sqrt{3}\right)dm^2$ **(3 b).**

Moguća rješenja zadataka za II razred

1. Definiciono područje jednačine je $x^2-1\geq 0$ i $a-x\geq 0$ **(5b).**Pod ovim uslovima jednačinu možemo kvadrirati, pa imamo: 28 b

$$x^2-1=a^2-2ax+x^2$$
$$2ax=a^2+1$$

Kada bi bilo $a=0$, iz posljednje jednakosti bismo imali $0=1$, što je nemoguće, dakle $a\neq 0$ **(2b)**, pa je

$$x=\frac{a^2+1}{2a}\ \textbf{(3b).}$$

Provjerimo da li ova vrijednost ispunjava uslove $x^2-1\geq 0$ i $a-x\geq 0$.

Prvi uslov:

$$\frac{a^2+1}{2a}-1\geq 0$$
$$a^4+2a^2+1-4a^2\geq 0$$
$$(a^2-1)^2\geq 0$$

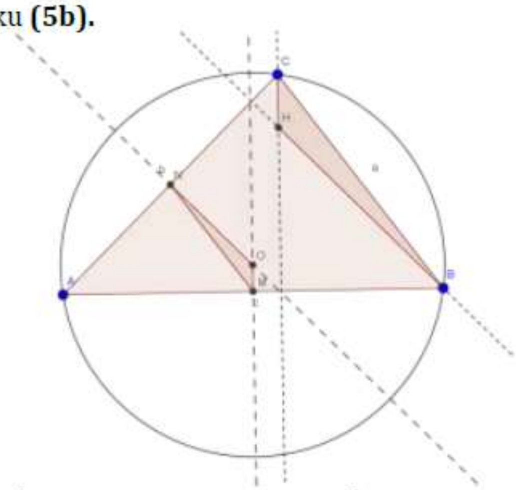
Dakle, uslov $x^2-1\geq 0$ je ispunjen za svako $a\neq 0$ **(9b).**

Drugi uslov:

$$a-\frac{a^2+1}{2a}\geq 0$$
$$\frac{(a-1)(a+1)}{2a}\geq 0$$
$$a\epsilon[-1,0)\cup[1,+\infty).\ \textbf{(9b)}$$

Dakle, skup svih vrijednosti parametra a za koje data jednačina ima rješenje je $a\epsilon[-1,0)\cup[1,+\infty)$.

2. Posmatrajmo sliku **(5b).** 26 b



Kako su $M\ i\ N$ sredine stranica AB i BC trougla ABC, to je MN srednja linija trougla i vrijedi $MN\parallel BC\ i\ MN=\frac{1}{2}BC$. **(5b)**

Kako je $OM\perp AB\wedge CH\perp AB$, to je $OM\parallel CQ$.

Kako je $MN\parallel BC\wedge OM\parallel CH$, to je $\sphericalangle NMO=\sphericalangle HCB$. **(6b)**

Na isti način je $\sphericalangle MNO=\sphericalangle HBC$ **(3b)**.

Zaključujemo da je $\Delta MON\sim\Delta CQB$, pa je

$OM:HC=MN:BC=1:2, odakle\ je\ HC=2OM$ **(7b).**

3. Za $a \neq -2$, rješenja x_1 i x_2 su različita od nule, pa izraz ima smisla **(3b)**. 22
Prema Vietovim formulama je

$$x_1 + x_2 = \frac{3a+1}{4}$$
$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{a+2}{4}$$

pa je:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{9a^2+14a+17}{(a+2)^2} \geq \frac{40}{9} \textbf{ (7b)}$$

Nakon sređivanja zadnje nejednakosti, uslov zadatka se svodi na

$$41a^2 - 34a - 7 \geq 0. \textbf{ (3b)}$$

Rješenja odgovarajuće kvadratne jednačine su $-\frac{7}{41}$ i 1, pa je skup rješenja posljednje nejednačine $a \in \left(-\infty, -\frac{7}{41}\right] \cup [1, +\infty)$ **(5b)**. Kako je $a \neq -2$, to je

$a \in (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{7}{41}\right] \cup [1, +\infty)$. **(4b)**

4. Neka je $z = a + bi$ traženi kompleksni broj. Uvrštavanjem traženog kompleksnog broja u prvi uslov imamo: 24b

$$|a + bi - 2 + i| = 5$$
$$\sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2} = 5 \textbf{ (4b)}$$

Kvadriranjem zajedne nejednakosti dobijamo

$$a^2 - 4a + b^2 + 2b = 20 \textbf{ (4b)} \qquad (1)$$

Uvrštavanjem $z = a + bi$ u uslov $Re\big(z \cdot (1+i)\big) = 2$, dobijamo:
$Re\big((a+bi) \cdot (1+i)\big) = 2$ **(4b)**, odakle je

$$a - b = 2 \textbf{ (4b)} \qquad (2)$$

Rješavanjem sistema jednačina (1) i (2) dobijaju se rješenja $(5,3)$ i $(-2,-4)$.
Prema tome kompleksni brojevi koji zadovoljavaju tražene uslove su:

$$z_1 = 5 + 3i$$
$$z_2 = -2 - 4i. \textbf{ (8b)}$$

Moguća rješenja zadataka za III razred

1. 20 b

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$
$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 4^{x-\frac{1}{2}}$$
$$4^x + 4^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$$
$$4^x\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3^x\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \textbf{(8b)}$$
$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$
$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{\sqrt{4^3}}{\sqrt{3^3}}$$
$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$x = \frac{3}{2} \qquad \textbf{(12b)}$$

2. Kako je 24 b

$$(sin^2x + cos^2x)^2 - 2sin^2xcos^2x = 1 - \frac{1}{2}sin^2 2x$$

to je data jednačina ekvivalentna sa jednačinom

$$sin^2 2x + 2sin2x - 2 = 0. \quad \textbf{(10 b)}$$

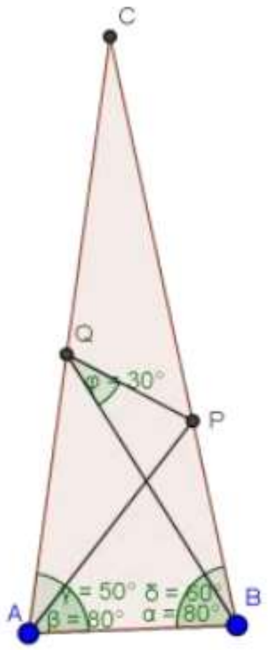
Uvođenjem smjene $sin2x = t$, posljednja nejednačina se svodi na kvadratnu jednačinu $t^2 + 2t - 2 = 0$, čija su rješenja $t_1 = -1 + \sqrt{3}$ i

$t_1 = -1 - \sqrt{3}$ **(4b).**

Kako je $-1 - \sqrt{3} < -1 < \sqrt{3} - 1 < 1$, to su sva rješenja jednačine, nakon vraćanja smjene, određena sa

$$x = \frac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{3}-1\right) + k\pi, k\epsilon Z$$
$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{3}-1\right) + m\pi, m\epsilon Z. \ \textbf{(10b)}$$

3. 30 b



Neka je $\sphericalangle BQP = \varphi, \overline{AB} = a$. Ugao na osnovici je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 80^0$. Tada je $\sphericalangle APB = 50^0, \sphericalangle BQA = 40^0, \sphericalangle QBP = 20^0$ i $\sphericalangle PAQ = 30^0$. **(5b)**

Prema tome ΔABP je jednakokraki, pa je $\overline{BP} = a$. **(2b)**

Primjenimo li sinusnu teoremu na ΔABQ imamo:

$$\frac{\overline{BQ}}{sin80^0} = \frac{\overline{AB}}{sin40^0}$$

$\overline{BQ} = a\frac{sin80^0}{sin40^0} = 2acos40^0$ **(7b).**

Primjenimo li kosinusnu teoremu na trougao na ΔBPQ imamo:

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{BP}^2 - 2\overline{BQ}\cdot\overline{BP}\cdot cos20^0 \\ &= 4a^2cos^2 40^0 + a^2 - 2\cdot 2a^2cos40^0cos20^0 \\ &= a^2(4cos^2 40^0 + 1 - 4cos40^0cos20^0) \\ &= a^2\left(4\frac{1+cos80^0}{2} + 1 - 2(cos60^0 + cos20^0)\right) \\ &= 2a^2(1 + cos80^0 - cos20^0) \\ &= 2a^2(1 - 2sin50^0sin30^0) = 2a^2(1 - sin50^0) \\ &= 2a^2\cdot 2\cdot sin^2 20^0\end{aligned}$$

odakle je $\overline{PQ} = 2asin20^0$ **(10b).**

Na osnovu sinusne teoreme iz trougla ΔPQB:

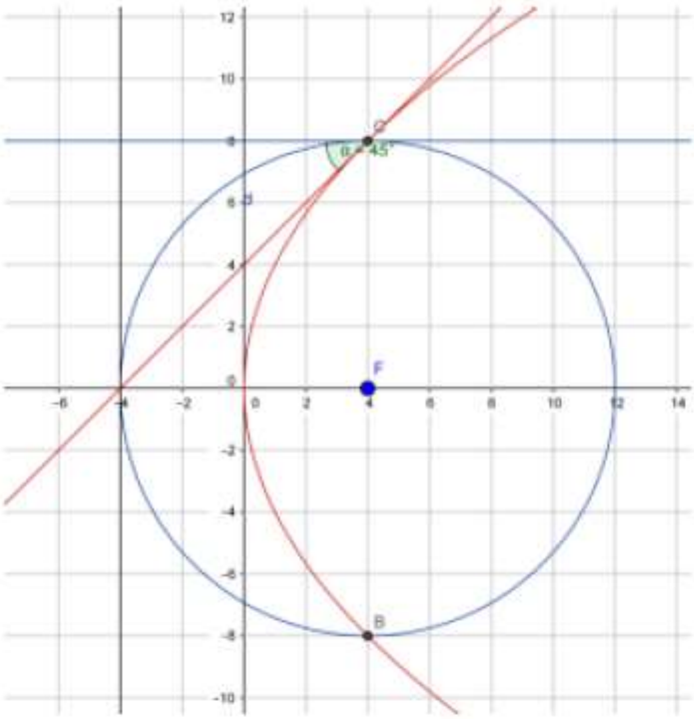
$$\frac{\overline{PQ}}{sin20^0} = \frac{\overline{PB}}{sin\varphi}$$

Odakle je

$$sin\varphi = \frac{\overline{PB}\cdot sin20^0}{\overline{PQ}} = \frac{asin20^0}{2asin20^0} = \frac{1}{2}$$

Odavde je $\varphi = 30^0$ *ili* $\varphi = 150^0$. Kako je $\sphericalangle BPQ > 50^0$, to je $\varphi = 30^0$ **(3b)**. Za sliku dati **(3b)**.

4. Fokus parabole $y^2 = 16x$ je $F(4,0)$, a jednačina direktrise je $x = -4$ **(2 b).** Kružnica ima centar u fokusu parabole i dodiruje direktrisu, pa je $r = p = 8$. 26 b



Jednačina kružnice je $(x-4)^2 + y^2 = 64$.**(sl. 3b+2b)**
Presječna tačka kružnice i parabole je (4,8) $(y^2 = 16x, x > 0)$dobije se rješavanjem sistema

$$y^2 = 16x$$
$$(x-4)^2 + y^2 = 64. \textbf{ (6b)}$$

Jednačine tangenti kružnice i parabole su redom $y = 8 \; i \; y = x + 4$
(4b+4b).
Ugao između tangenti je

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$
$$\varphi = 45^0 \textbf{ (5b).}$$

Moguća rješenja zadataka za IV razred

1. Iz $f(1) = 2$ imamo: 22 b

$f(2) = \frac{1+f(1)}{1-f(1)} = \frac{1+2}{-1} = -3$

$f(3) = \frac{1+f(2)}{1-f(2)} = \frac{1-3}{1+3} = \frac{-1}{2}$

$f(4) = \frac{1+f(3)}{1-f(3)} = \frac{1}{3}$

$f(5) = \frac{1+f(4)}{1-f(4)} = 2$ **(8b)**

$f(5) = 2 = f(1)$ **(6b)**

Dakle važi $f(n+4) = f(n)$

Odavde je $f(2000) = f(1996) = f(1992) = \cdots . = f(4) = \frac{1}{3}$ **(8b)**

2. Prva tri člana geometrijskog niza su a_1, a_1q, a_1q^2. 27 b

Prema uslovu zadatka je $a_1 + a_1q + a_1q^2 = 91$, odakle je

$$a_1(1 + q + q^2) = 91 \qquad \textbf{(5b)} \qquad (1)$$

Brojevi su $a_1 + 25, a_1q + 27, a_1q^2 + 1$ čine aritemtički niz, pa je

$$a_1q + 27 - (a_1 + 25) = a_1q^2 + 1 - (a_1q + 27)$$
$$2a_1q - a_1 - a_1q^2 = -28$$
$$a_1(q^2 - 2q + 1) = 28$$
$$a_1(q-1)^2 = 28 \qquad \textbf{(8b)} \qquad (2)$$

Eliminacijom a_1 iz (1) i (2) dobijamo:

$3q^2 - 10q + 3 = 0$, čija su rješenja $q_1 = 3 \; i \; q_2 = \frac{1}{3}$, a odavdje je $a_1 = 7 \; ili \; a_1 = 63$. **(9b)**

Dakle sedmi član geometrijskog niza je 5103 ili $\frac{7}{81}$. **(5b)**

3. Za $n = 2$ je $2^{2^2} - 1 = 15$, pa je dati izraz djeljiv sa 15. **(3b)** 25 b

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. neka je $2^{2^k} - 1 = 15N$. **(4 b)**

Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$, odnosno da je $2^{2^{k+1}} - 1$ djeljivo sa 15.

$$2^{2^{k+1}} - 1 = 2^{2^k \cdot 2} - 1 = (2^{2k})^2 - 1 = (2^{2k} - 1)(2^{2k} + 1)$$
$$= 15N(2^{2k} + 1)$$

Dakle tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$. **(16 b)**

Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da je tvrdnja tačna za svaki prirodan broj n. **(2 b)**

4. Ako poglavica Apača govori prvi, njegovi ratnici se mogu rasporediti na $7 \cdot 6$ načina **(4b)**. Ako govori drugi na $6 \cdot 5$ načina 26 b

itd **(4b).**
Ako govori šesti njegovi ratnici se mogu rasporediti na dva načina. **(5b).** U svakom odo ovih slučajeva preostalih 5 poglavica se mogu rasporediti na 5! načina **(6b)**.
Dakle, ukupan brpj rasporeda govornika je

$$(7\cdot 6+6\cdot 5+5\cdot 4+4\cdot 3+3\cdot 2+2\cdot 1)\cdot 5!=13440$$ **(7b)**