BOSNA I HERCEGOVINA
FEDERACIJA BOSNE I HERCEGOVINE
SREDNJOBOSANSKI KANTON
MINISTARSTVO OBRAZOVANJA, NAUKE, KULTURE I SPORTA

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

MJEŠOVITA SREDNJA ŠKOLA BUGOJNO

23.03.2019. godine

Zadaci za prvi razred

23.3.2019. godine

Zadatak 1.

Odrediti sve proste brojeve p takve da je broj $3^p + p^3$ prost.

Napomena. Za neki prirodan broj n kažemo da je prost ukoliko su njegovi jedini djelioci u skupu prirodnih brojeva 1 i n. Inače, za broj kažemo da je složen. Broj 1 ne smatramo ni prostim ni složenim.

Zadatak 2.

Da li je veće $\frac{2^{2018}+1}{2^{2019}+1}$ ili $\frac{2^{2019}+1}{2^{2020}+1}$?

Zadatak 3.

Osnovice trapeza su $a = 7cm$ i $c = 2cm$, a jedan krak je $d = 4cm$. Odrediti obim i površinu trapeza, ukoliko je zbir uglova na većoj osnovici trapeza $90°$.

Zadatak 4.

Na raspolaganju imate pločice dimenzija 1×1, 2×2 i 3×3. Svakih pločica imate proizvoljan broj (koliko vama treba). Koja je najmanja kvadratna površina koju možete popločati koristeći **tačno** jedanaest pločica? Svako polje ploče mora biti popločano, te se pločice ne smiju preklapati ili prelaziti van okvira kvadratne površine koju popločavamo.

Napomena. Nakon što pronađete veličinu kvadrata kojeg možete popločati, potrebno je da pokažete da je nemoguće popločati kvadrat manje dimenzije.

Svaki zadatak nosi 25 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.

Sretno!

Rješenja zadataka za prvi razred

Zadatak 1.

Odrediti sve proste brojeve p takve da je broj $3^p + p^3$ prost.

Rješenje

Posmatrajmo slučaj $p = 2$. Tada je $3^p + p^3 = 3^2 + 2^3 = 9 + 8 = 17$, što je očigledno prost broj.

Neka je sada $p > 2$. Svi prosti brojevi veći od 2 su neparni. Stoga, p^3 je također neparan broj. Kako je 3^p također neparan, izraz $3^p + p^3$ je paran broj. Kako je p prirodan broj, to je $3^p > 2$, pa je $3^p + p^3 > 2$. Kako je 2 jedini prost paran broj, to izraz $3^p + p^3$ ne može biti prost.

Dakle, jedino rješenje je $p = 2$.

Rješenja zadataka za prvi razred

Zadatak 2.

Da li je veće $\frac{2^{2018}+1}{2^{2019}+1}$ ili $\frac{2^{2019}+1}{2^{2020}+1}$?

Rješenje

Neka je

$$A = \frac{2^{2018} + 1}{2^{2019} + 1}$$

$$B = \frac{2^{2019} + 1}{2^{2020} + 1}.$$

Pretpostavimo da je $A > B$. Ukoliko izraz $A > B$ svedemo na izraz koji je očigledno tačan, naša tvrdnja je dokazana. Svaki od narednih izraza je ekvivalentan:

$$A > B$$

$$\frac{2^{2018} + 1}{2^{2019} + 1} > \frac{2^{2019} + 1}{2^{2020} + 1}$$

$$(2^{2018} + 1)(2^{2020} + 1) > (2^{2019} + 1)(2^{2019} + 1)$$

$$2^{4038} + 2^{2018} + 2^{2020} + 1 > 2^{4038} + 2^{2019} + 2^{2019} + 1$$

$$2^{2018} + 2^{2020} > 2^{2019} \cdot 2$$

$$1 + 2^2 > 2 \cdot 2 = 4$$

$$5 > 4.$$

Dakle, kako je $5 > 4$ očigledno tačno, to je i početna tvrdnja $A > B$ također tačna.

Rješenja zadataka za prvi razred

Zadatak 3.

Osnovice trapeza su $a = 7cm$ i $c = 2cm$, a jedan krak je $d = 4cm$. Odrediti obim i površinu trapeza ukoliko je zbir uglova na većoj osnovici trapeza $90°$.

Rješenje.

Neka je dat trapez $ABCD$ sa osnovicama $AB = a = 7, CD = c = 2$ i krakom $AD = d = 4$.

Neka se stranice AD i BC sijeku u tački E. Kako je zbir uglova na većoj osnovici, AB, jednak $90°$, to je $\angle AEB = 90°$ u trouglu AEB. Dakle, trouglovi AEB i DEC su pravougli trouglovi.

Kako je $DC||AB$, to su pravougli trouglovi AEB i DEC slični, jer imaju jednake uglove. Tada je

$$\frac{AE}{DE} = \frac{AB}{DC} = \frac{7}{2}.$$

Neka je $DE = x$. Tada je $AE = x + 4$, pa vrijedi

$$\frac{x+4}{x} = \frac{7}{2}.$$

Dakle,

$$2x + 8 = 7x$$

$$5x = 8$$

$$x = \frac{8}{5}.$$

Kako je trougao DEC pravougli, iz Pitagorine teoreme imamo

$$EC^2 + x^2 = 2^2$$

$$EC^2 + \frac{64}{25} = 4$$

$$EC^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow EC = \frac{6}{5}.$$

Isto tako, iz pravouglog trougla AEB i Pitagorine teoreme, imamo da je

$$AE^2 + EB^2 = AB^2.$$

$$\left(4 + \frac{8}{5}\right)^2 + EB^2 = 7^2.$$

$$EB^2 = 49 - \frac{784}{25} = \frac{441}{25} \Rightarrow EB = \frac{21}{5}.$$

Dakle, $BC = EB - EC = \frac{15}{5} = 3$.

Sada je očigledno obim trapeza jednak $AB + BC + CD + AD = 7 + 3 + 2 + 4 = 16.$

Površina trapeza se može izračunati kao razlika površina trouglova EAB i $EDC.$

$$P_{ABCD} = P_{EAB} - P_{EDC} = \frac{AE \cdot EB}{2} - \frac{ED \cdot EC}{2} =$$

$$= \frac{\frac{28}{5} \cdot \frac{21}{5}}{2} - \frac{\frac{8}{5} \cdot \frac{6}{5}}{2} = \frac{294}{25} - \frac{24}{25} = \frac{54}{5}.$$

Rješenja zadataka za prvi razred

Zadatak 4.

Na raspolaganju imate pločice dimenzija 1×1, 2×2 i 3×3. Svakih pločica imate proizvoljan broj (koliko vama treba). Koja je najmanja kvadratna površina koju možete popločati koristeći **tačno** jedanaest pločica? Svako polje ploče mora biti popločano, te se pločice ne smiju preklapati ili prelaziti van okvira kvadratne površine koju popločavamo.

Rješenje

Neka je stranica traženog kvadrata x. Ukoliko koristimo samo pločice 1×1, ukupno ćemo popločati površinu 11. Kako ne postoji kvadrat površine 11 sa stranicama u skupu prirodnih brojeva, to je očigledno $x > 3$.

Neka ćemo za popločavanje kvadrata stranice x koristiti a pločica 1×1, b pločica 2×2 i c pločica 3×3, te kako znamo da jedna pločica 1×1 pokriva površinu jedan, jedna pločica 2×2 površinu četiri i jedna pločica 3×3 površinu 9, to ćemo ukupno popločati $a \cdot 1 + b \cdot 4 + c \cdot 9$ polja. Istovremeno, treba da vrijedi $a + 4b + 9c = x^2$, te $a + b + c = 11$.

Posmatrajmo da li možemo popločati kvadrat $x = 4$. Tada je

$$a + 4b + 9c = 16 \wedge a + b + c = 11.$$

Dakle, $3b + 8c = 5$.

Očigledno je $c = 0$ (jer bi tada $3b + 8c > 8$). Dakle, $3b = 5$, što je nemoguće.

Posmatrajmo slučaj $x = 5$. Tada je

$$a + 4b + 9c = 25 \wedge a + b + c = 11$$

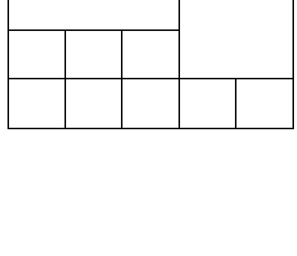
Dakle, $3b + 8c = 14$.

Ukoliko je $c > 1$, lijeva strana je veća od desne. Stoga, c može biti ili 0 ili 1. Ukoliko je $c = 0$, imamo $3b = 14$ što je nemoguće. Dakle, $c = 1$. Tada je $3b = 6$, tj. $b = 2$. Sada je

$$a + b + c = a + 2 + 1 = a + 3 = 11,$$

pa je $a = 8$. Površina koja je pokrivena, jednaka je $8 + 4 \cdot 2 + 9 = 8 + 8 + 9 = 25$.

Ostaje pokazati da je moguće pokriti ovu površinu. Jedno od mogućih pokrivanja dato je na slici ispod.



Zadaci za drugi razred

23.3.2019. godine

Zadatak 1.

a) Dokazati da vrijedi $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$.
b) Da li je broj $2019^4 + 4^{2021}$ prost?

Zadatak 2.

Boris govori jedan trocifreni broj Amili. Nijedna cifra Borisovog broja nije jednaka 0 i sve cifre su različite. Amila zapisuje sve trocifrene brojeve koji se mogu dobiti miješanjem cifara Borisovog broja na papir. Zbir zapisanih brojeva jednak je 2442. Koji je najveći broj kojeg je Boris mogao reći Amili?

Zadatak 3.

Neka je $ABCD$ kvadrat i M i N tačke na AB i BC, redom. Vrijedi $\angle MDN = 45°$. Ako je R sredina duži MN dokaži da je $PR = RQ$, gdje su P i Q tačke presjeka AC sa MD i ND, redom.

Zadatak 4.

Tom i Jerry igraju igru. Najprije Jerry napiše 9 prirodnih brojeva na papir, a Tom pokušava dobiti da svi brojevi budu jednaki, višestrukim ponavljanjem sljedeće operacije: u jednom koraku on bira dva broja i mijenja svaki od njih njihovim zbirom. Može li Jerry odabrati takve brojeve da Tom ne može ostvariti svoj naum ili Tom može uvijek napraviti da brojevi budu jednaki, bez obzira koje brojeve Jerry odabere?

Svaki zadatak nosi 25 bodova.
Vrijeme za izradu zadataka je 120 minuta.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.

Sretno!

Rješenja zadataka za drugi razred

Zadatak 1.

a) Dokazati da vrijedi $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$.

b) Da li je broj $2019^4 + 4^{2021}$ prost?

Rješenje

a) Krenimo od izraza

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab).$$

Nakon množenja, imamo

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + 2a^3b + 2a^2b^2 + 4b^4 + 4ab^3 - 2a^3b - 4ab^3 - 4a^2b^2.$$

Sada je

$$0 = a^4 + 2a^2b^2 + 2a^3b + 2a^2b^2 + 4b^4 + 4ab^3 - 2a^3b - 4ab^3 - 4a^2b^2 - a^4 - 4b^4.$$

$$0 = (a^4 - a^4) + (2a^2b^2 + 2a^2b^2 - 4a^2b^2) + (2a^3b - 2a^3b) + (4b^4 - 4b^4) + (4ab^3 - 4ab^3) = 0.$$

Dakle, tvrdnja je dokazana.

b) Uočimo da se $2019^4 + 4^{2021}$ može napisati kao $2019^4 + 4 \cdot (4^{504})^4$. Koristeći tvrdnju dokazanu u prvom dijelu zadatka, vidimo da je

$$2019^4 + 4 \cdot (4^{504})^4 = (2019^2 + 2 \cdot (4^{504})^2 - 2 \cdot 2019^2 \cdot 4^{504}) \cdot (2019^2 + 2 \cdot (4^{504})^2 + 2 \cdot 2019^2 \cdot 4^{504}).$$

Izraz će biti složen ukoliko su vrijednosti u obje zagrade veće od 1. Za drugu zagradu je tvrdnja jasna. Dokažimo sada da je

$$2019^2 + 2 \cdot (4^{504})^2 - 2 \cdot 2019^2 \cdot 4^{504} > 1.$$

Dovoljno je pokazati da je

$$2 \cdot (4^{504})^2 > 2 \cdot 2019^2 \cdot 4^{504}.$$

Navedena tvrdnja se svodi na

$$4^{504} > 2019^2.$$

Ova tvrdnja je očigledno tačna, jer je već $4^{11} > 2019^2$.

Rješenja zadataka za drugi razred

Zadatak 2.
Boris govori jedan trocifreni broj Amili. Nijedna cifra Borisovog broja nije jednaka 0 i sve cifre su različite. Amila zapisuje sve trocifrene brojeve koji se mogu dobiti miješanjem cifara Borisovog broja na papir. Zbir zapisanih brojeva jednak je 2442. Koji je najveći broj kojeg je Boris mogao reći?

Rješenje

Neka Boris kaže broj $\overline{abc}.$ Tada Amila može zapisati šest brojeva

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

$$\overline{acb} = 100a + 10c + b$$

$$\overline{bac} = 100b + 10a + c$$

$$\overline{bca} = 100b + 10c + a$$

$$\overline{cab} = 100c + 10a + b$$

$$\overline{cba} = 100c + 10b + a$$

Ukoliko saberemo sve brojeve, dobijamo

$$222(a + b + c) = 2442.$$

Sada je

$$a + b + c = 11.$$

Da bi Borisov broj bio najveći, neophodno je da prva cifra poprimi najveću moguću vrijednost. Ukoliko bi Boris za cifru a izabrao broj 9, te kako ne može izabrati cifru 0, najmanje vrijednosti za b i c bi bile 1 i 2. Međutim, tada bi zbir cifara bio veći od 11. Stoga, a mora biti 8, dok za b i c biramo 2 i 1, redom. Dakle, najveći broj kojeg je Boris mogao reći je 821.

Rješenja zadataka za drugi razred

Zadatak 3.
Neka je $ABCD$ kvadrat i M i N tačke na AB i BC, redom. Vrijedi $\angle MDN = 45°$. Ako je R sredina duži MN dokaži da je $PR = RQ$, gdje su P i Q tačke presjeka AC sa MD i ND, redom.

Rješenje
Označimo ugao $\angle ADM$ sa φ. Posmatrajmo ugao $\angle QAM = 45° = \angle MDQ$, što znači da je $AMQD$ tetivan četverougao. Međutim, tada je jednostavno zaključiti da je $\angle AQM = \varphi = \angle ADM$, kao uglovi nad istom tetivom.

Poznato je da je $\angle ACB = 45°$, da je $\angle NDC = 45° - \varphi$. Sada iz pravouglog trougla DCN lahko zaključujemo da je $\angle DNC = 45° + \varphi$, te $\angle NQC = 90° - \varphi$. Iz ovoga je $\angle AQN = 90° + \varphi$. Imamo da je $\angle MQN = \angle AQN - \angle AQM = 90 + \varphi - \varphi = 90°$. Dakle, trougao MQN je pravougli, te kako je R središte hipotenuze, to je $QR = RM = RN$. Analogno bi dokazali sa druge strane da je trougao PMN pravougli, odnosno da je $PR = RM = RN$. Dakle, iz svega navedenog je $PR = QR$.

Rješenja zadataka za drugi razred

Zadatak 4.
Tom i Jerry igraju igru. Najprije Jerry napiše 9 prirodnih brojeva na papir, a Tom pokušava dobiti da svi brojevi budu jednaki, višestrukim ponavljanjem sljedeće operacije: u jednom koraku on bira dva broja i mijenja svaki od njih njihovim zbirom. Može li Jerry odabrati takve brojeve da Tom ne može ostvariti svoj naum ili Tom može uvijek napraviti da brojevi budu jednaki, bez obzira koje brojeve Jerry odabere?

Rješenje
Za početak, važno je uočiti da se opisanim operacijama nikada ne može dobiti negativan broj ili nula.

Neka je Tom napisao brojeve

$$2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.$$

U ovom koraku, postoji paran broj najvećih vrijednosti na papiru.

Biranjem bilo koja dva broja, Jerry može dobiti paran broj najvećih vrijednosti na papiru.

Ukoliko Jerry u bilo kojem izabere dvije vrijednosti a i b, može doći do jedne od mogućnosti:

a) Jerry je izabrao dva broja čiji je zbir veći od najvećeg izabranog broja. Tada je broj najvećih brojeva na ploči jednak 2.
b) Jerry je izabrao dva broja čiji je zbir manji od najvećeg izabranog broja. Tada je broj najvećih brojeva na ploči ostao isto.
c) Jerry je izabrao dva broja čiji je zbir jednak najvećem izabranom. Nijedan od izabranih brojeva nije mogao biti jednak najvećem (jer bi to značilo da je drugi broj nula, što je nemoguće). Dakle, raniji broj najvećih zapisanih brojeva je povećan za dva.

Kao što možemo uočiti, na početku je broj najvećih elemenata jednak 2. U svakom potezu, taj broj postaje dva, ostaje jednak ili se poveća za dva. Dakle, broj najvećih elemenata je u svakom potezu paran.

U slučaju da su svi brojevi jednaki, broj najvećih vrijednosti napisanih na papiru bi bio 9. Međutim, to je neparan broj, pa je pokazano da Tom može zapisati brojeve na ploču.

Zadaci za treći razred

23.3.2019. godine

Zadatak 1.

Naći sva rješenja sistema u skupu prirodnih brojeva

$$ab + c = 34$$

$$a + bc = 29.$$

Zadatak 2.

Naći sve prirodne brojeve a i b takve da je

$$3 \cdot 2^a + 1 = b^2.$$

Zadatak 3.

U trouglu ABC poznato je da je $\angle ABC = 75°$ i $\angle BCA = 45°$. Ako je P tačka na stranici BC takva da je dužina stranice BP dva puta veća od dužine stranice PC, izračunajte ugao $\angle APB$.

Zadatak 4.

Je li moguće podijeliti skup brojeva $A = \{1,2,3 \dots ,33\}$ na jedanaest podskupova od po tri elementa (svaki broj se nalazi u tačno jednom podskupu), takva da je u svakom podskupu jedan element jednak sumi preostala dva elementa? Ukoliko jeste, dajte takvu podjelu, te ukoliko nije, dokažite da takva podjela ne postoji.

Svaki zadatak nosi 25 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.

Sretno!

Rješenja zadataka za treći razred

Zadatak 1.
Naći sva rješenja sistema u skupu prirodnih brojeva

$$ab + c = 34$$

$$a + bc = 29.$$

Rješenje
Sabiranjem izraza dobijamo

$$ab + c + a + bc = 63 \Leftrightarrow$$

$$b(a + c) + a + c = 63 \Leftrightarrow$$

$$(a + c)(b + 1) = 63.$$

Sada imamo šest mogućnosti za rastavljanje broja 63 na dva djelioca u skupu prirodnih brojeva: $63 = 1 \cdot 63 = 63 \cdot 1 = 3 \cdot 21 = 21 \cdot 3 = 7 \cdot 9 = 9 \cdot 7$.

1. Ispitajmo prvi slučaj:

   $$a + c = 1$$

   $$b + 1 = 63.$$

   Ovaj slučaj otpada, jer su a i c prirodni brojevi, pa njihov zbir ne može biti jednak 1.

2. Drugi slučaj također otpada, jer $b + 1 > 1$ u za $b \in \mathbb{N}$.
3. U trećem slučaju, imamo:

   $$a + c = 3$$

   $$b + 1 = 21 \Rightarrow b = 20.$$

   Uvršavanjem $c = 3 - a$ u prvu jednačinu $20a + c = 34$, dobijamo

   $$20a + 3 - a = 34 \Rightarrow 19a = 31.$$

   Ovaj slučaj također nema rješenja u skupu $\mathbb{N}$.

4. U četvrtom slučaju, $b + 1 = 3$, tj. $b = 2$. Također, $a + c = 21$. Uvršavanjem $c = 21 - a$ u jednačinu $2a + c = 34$, dobijamo $2a + 21 - a = 34$. Sada je $a = 13$, što dovodi do trojke $(a, b, c) = (13, 2, 8)$ koja je također rješenje.
5. U petom slučaju, $b = 8$, te $a + c = 7$. Uvrštavanjem $c = 7 - a$, dobijamo $8a + 7 - a = 34$. Sada je $7a = 27$, što nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.
6. U šestom slučaju, $b = 6$, te $a + c = 9$. Sada je $6a + 9 - a = 34$. Ovaj slučaj također nema rješenja. Sada je $6a = 25$, pa je $a = 5$. Sada je $c = 4$, pa je jedino rješenje $(a, b, c) = (5,6,4)$.

Rješenja zadataka za treći razred

Zadatak 2

Naći sve prirodne brojeve a i b takve da je

$$3 \cdot 2^a + 1 = b^2.$$

Rješenje

Jednačinu možemo zapisati kao

$$3 \cdot 2^a = b^2 - 1 = (b-1)(b+1).$$

Kako je $a > 0$, možemo uočiti da je $3 \cdot 2^a$ paran broj. Stoga, bar jedan od brojeva $b-1$ i $b+1$ mora biti paran. Međutim, kako su ova dva broja iste parnosti, zaključujemo da su oba broja parna. Kako se $b-1$ i $b+1$ razlikuju za 2, tačno jedan od njih može sadržavati višestruki faktor 2 (npr. 4, 8 i slično). Stoga, ili je broj $b-1$ ili $b+1$ djeljiv sa 2, te nije sa 4.

Taj faktor može sadržavati broj 3. U slučaju da sadrži broj 3, faktor je jednak broju 6. Inače, faktor je jednak broju 2.

Drugi faktor se mora razlikovati tačno za 2.

Ukoliko je prvi faktor jednak 2, drugi faktor je jednak 0 ili 4. Kako nijedan od ovih faktora ne sadrži broj 3, dolazimo do kontradikcije.

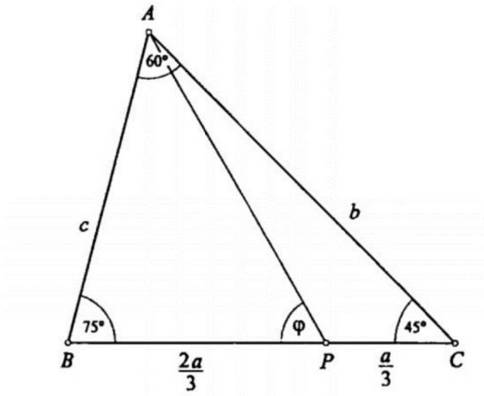
Dakle, prvi faktor je jednak 6. Sada je drugi faktor 4 ili 8, te su ova dva broja rješenje. Dakle, jednačina ima dva rješenja $(a, b) = (3,5)$ i $(a, b) = (4,7)$.

Rješenja zadataka za treći razred

Zadatak 3

U trouglu ABC poznato je da je $\angle ABC = 75°$ i $\angle BCA = 45°$. Ako je P tačka na stranici BC takva da je dužina stranice BP dva puta veća od dužine stranice PC, izračunajte ugao $\angle APB$.

Rješenje



Iz sinusne teoreme u trouglu $\boldsymbol{ABC}$ imamo

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin 60°}{\sin 45°} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ovaj izraz možemo pisati kao

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}a}{c} = \frac{c}{a}.$$

Zbog $BP = \frac{2}{3}a$, možemo pisati

$$\frac{BP}{c} = \frac{c}{a}.$$

Stoga, zaključujemo da su trouglovi BPA i BAC slični. Zato je $\varphi = \angle BAC = 60°$.

Rješenja zadataka za treći razred

Zadatak 4
Je li moguće podijeliti skup brojeva $A = \{1,2,3 \dots ,33\}$ na jedanaest podskupova od po tri elementa (svaki broj se nalazi u tačno jednom podskupu), takva da je u svakom podskupu jedan element jedan sumi preostala dva elementa? Ukoliko jeste, dajte takvu podjelu, te ukoliko nije, dokažite da takva podjela ne postoji.

Rješenje
Pretpostavimo da postoji takva podjela na jedanaest podskupova. Tada, za svaki od podskupova $\{a, b, c\}$ imamo da je, bez gubljenja opštosti, $a + b = c$.

Međutim, izraz $a + b = c$ možemo napisati kao $a + b + c = 2c$. Dakle, suma elemenata u svakom od 11 podskupova je parna. Samim tim, suma elemenata u svih 11 podskupova je također parna.

Međutim, podskup sačinjavaju prirodni brojevi od 1 do 33, stoga, suma svih ovih brojeva mora biti parna. Ta suma je jednaka

$$1 + 2 + \cdots + 33 = \frac{33 \cdot 34}{2} = 33 \cdot 17,$$

a ovo je neparan broj. Dakle, kontradikcija. Ne postoji tražena podjela na jedanaest podskupova.

Zadaci za četvrti razred

23.3.2019. godine

Zadatak 1
U skupu realnih brojeva, riješiti jednačinu

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}.$$

Zadatak 2
Ako je $\sin x-\cos x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, izračunajte $\sin^6 x+\cos^6 x$.

Zadatak 3
Odrediti sve prirodne brojeve n takve da je 5^n+12^n potpun kvadrat.

Napomena. Za broj kažemo da je potpun kvadrat ukoliko je on jednak kvadratu prirodnog broja.

Zadatak 4
Neka je dat skup

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Posmatrajmo neku permutaciju elemenata skupa i označimo je sa s (promiješamo elemente). Ukupno imamo 8 uzastopnih trojki u permutaciji. Posmatrajmo sumu elemenata unutar svake trojke. Najveću od njih označimo sa $M(s)$. Na primjer, ukoliko imamo permutaciju $s=(4,6,2,9,0,1,8,5,7,3)$, dobijamo 8 suma: 12, 17, 11, 10, 9, 14, 20, 15. Samim tim, $M(s)=20$.

Koja je najmanja vrijednost koju M može poprimiti? Dokazati tvrdnju.

Svaki zadatak nosi 25 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.

Sretno!

Rješenja zadataka za četvrti razred

Zadatak 1
U skupu realnih brojeva, riješiti jednačinu

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}.$$

Rješenje
Kvadriranjem početnog izraza dobijamo

$$x^2+x+1+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=x+3.$$

Sada je

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=2.$$

Kako je

$$x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2,$$

zbog A_2G_2 nejednakosti, imamo da je

$$2=x^2+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\geq 2+2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\geq 2.$$

Dakle, izraz pod korijenom mora biti jednak nuli, te istovremeno $x^2=\frac{1}{x^2}$, da bi $x^2+\frac{1}{x^2}$ bilo jednako 2.

Iz ovoga je $x=\pm 1$.

U slučaju da je $x=1$, izraz pod korijenom je jednak $\sqrt{4}=2$, što nije rješenje.

U slučaju da je $x=-1$, imamo da je izraz pod korijenom jednak nuli.

Dakle, $x=-1$ je jedino rješenje.

Rješenja zadataka za četvrti razred

Zadatak 2

Ako je $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, izračunajte $\sin^6 x + \cos^6 x$.

Rješenje

Kvadriramo li početnu jednakost, dobijamo

$$\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{3}.$$

Kako je $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, imamo da je

$$1 - 2\sin x \cos x = \frac{1}{3},$$

pa je

$$\sin x \cos x = \frac{1}{3}.$$

Izraz $\sin^6 x + \cos^6 x$ možemo pisati kao

$$\begin{aligned}
\sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) \\
&= \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x \\
&= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x \\
&= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x.
\end{aligned}$$

Kako je $\sin x \cos x = \frac{1}{3}$, konačno je

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3(\sin x \cos x)^2 = 1 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}.$$

Rješenja zadataka za četvrti razred

Zadatak 3
Odrediti sve prirodne brojeve n takve da je $5^n + 12^n$ potpun kvadrat.

Napomena. Za broj kažemo da je potpun kvadrat ukoliko je on jednak kvadratu prirodnog broja.

Rješenje
Ako je broj n neparan, tj. oblika $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, tada je

$$5^n = 5^{2k-1} \equiv 2 \ (mod\ 3).$$

Samim tim,

$$5^n + 12^n \equiv 2 \ (mod\ 3),$$

za neparne brojeve n. Kako potpuni kvadrati ne mogu dati ostatak 2 pri dijeljenju sa 3, za neparne vrijednosti n izraz ne može biti potpun kvadrat.

Neka je $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Sada imamo da je

$$5^{2k} + 12^{2k} = x^2.$$

Iz ovoga je

$$5^{2k} = (x - 12^k)(x + 12^k).$$

Broj 5 ne može istovremeno dijeliti $x - 12^k$ i $x + 12^k$, jer bi tada 5 dijelilo $2 \cdot 12^k$. Stoga, jedan od brojeva $x - 12^k$ ili $x + 12^k$ je jednak 1. Kako je $x - 12^k < x + 12^k$, imamo da je

$$1 = x - 12^k \Leftrightarrow$$

$$5^{2k} = x + 12^k.$$

Iz prve jednačine, imamo da je $x = 1 + 12^k$, pa je

$$5^{2k} = 1 + 12^k + 12^k = 1 + 2 \cdot 12^k.$$

Za $k = 1$, imamo da je jednačina tačna. Stoga, jedno rješenje je $n = 2$.

Za $k = 2$, imamo da je $5^{2k} = 25^k > 2 \cdot 12^k + 1$.

Dokažimo da je za svaki broj $k > 1$ izraz $25^k > 2 \cdot 12^k + 1$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki broj k. Za $k + 1$ imamo

$$25^{k+1} = 25^k \cdot 25 > 25 \cdot (2 \cdot 12^k + 1) = 2 \cdot 25 \cdot 12^k + 25 > 2 \cdot 12^{k+1} + 1.$$

Ovim je tvrdnja dokazana po principu matematičke indukcije. Dakle, jedino rješenje je $n = 2$.

Rješenja zadataka za četvrti razred

Zadatak 4

Neka je dat skup

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Posmatrajmo neku permutaciju elemenata skupa i označimo je sa s (promiješamo elemente). Ukupno imamo 8 uzastopnih trojki u permutaciji. Posmatrajmo sumu elemenata unutar svake trojke. Najveću od njih označimo sa $M(s)$. Na primjer, ukoliko imamo permutaciju $s = (4,6,2,9,0,1,8,5,7,3)$, dobijamo 8 suma: 12, 17, 11, 10, 9, 14, 20, 15. Samim tim, $M(s) = 20$.

Koja je najmanja vrijednost koju M može poprimiti? Dokazati tvrdnju.

Rješenje

Posmatrajmo permutaciju

$$t = (9,1,3,7,2,4,6,0,5,8).$$

Vrijedi da je

$$M(t) = 13.$$

Dokažimo da vrijednost $M(t)$ ne može biti manja. Ukoliko je ta vrijednost manja od 13, to znači da je u najgorem slučaju suma elemenata za bilo koju uzastopnu trojku elemenata iz permutacije najviše 12. Ukoliko imamo permutaciju

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9),$$

tada mora vrijedi

$$a_1 + a_2 + a_3 \leq 12.$$
$$a_4 + a_5 + a_6 \leq 12.$$
$$a_7 + a_8 + a_9 \leq 12.$$

Dakle, suma ovih elemenata je najviše 36. Kako je ukupna suma elemenata 45, to mora biti $a_0 = 9$. S druge strane, posmatramo li trojke $(a_0, a_1, a_2), (a_3, a_4, a_5), (a_6, a_7, a_8)$ analogno zaključujemo da je $a_9 = 9$. Međutim, kako se radi o permutaciji početnog skupa, nemoguće je da imamo dva ista elementa. Time je dokazano da ne može vrijednost M biti manja od 13.