57. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO TAKMIČENJE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
Bugojno, 01.04.2017. godine

PRVI RAZRED

1. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $abc(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$ i da vrijedi
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1007}{1008}.$$
Dokazati da je tada
$$\frac{ab}{(a+c)(b+c)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}=2017.$$

2. Dokazati da se brojevi $1, 2, ..., 16$ mogu poredati u niz tako da je zbir bilo koja dva susjedna broja kvadrat nekog prirodnog broja.

3. Da li postoji prirodan broj n takav da je suma svih cifara u decimalnom zapisu broja $n(4n+1)$ jednaka 2017? Obrazložiti!

4. U jednakokrakom trouglu $\triangle ABC$ ($|AB| = |AC|$) ugao pri vrhu A iznosi $108°$. Simetrala ugla $\sphericalangle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u tački D, a tačka E je na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|BE| = |AE|$. Ako se zna da je $|AE| = m$,izračunati $|ED|$.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Sretno!

1.Neka su a, b, c realni brojevi za koje vrijedi $abc(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$
Ako je

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = \frac{1007}{1008}$$

Dokazati da je

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{ca}{(a+b)(b+c)} = 2017$$

Rjesenje:

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{ca}{(a+b)(b+c)} =$$

$$= \frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc} =$$

$$= \frac{(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-3}{(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-1} = \frac{\frac{1007}{1008}-3}{\frac{1007}{1008}-1} = 2017$$

2.Dokazati da se brojevi od 1 do 16 mogu poredati u niz tako da je zbir svaka dva susjedna clana kvadrat nekog prirodnog broja,

Rjesenje:

$$16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8$$

Je jedno od trazenih redanja.

3.Da li postoji prirodan broj n, takav da je zbir cifara u decimalnom zapisu broja $n(4n+1)$ jednaka 2017.Obrazloziti!

Rjesenje:

Ako je $n=3k+2$ ili je $n=3k$ tada je $n(4n+1)$ djeljiv sa 3.
No broj je djeljiv sa 3 ako i samo ako mu je zbir cifara djeljiv sa 3.
Neka je $n=3k+1$.Tada broj $n(4n+1)$ daje ostatak 2 pri dijeljenju sa brojem 3.Neka je $S(n)$ zbir cifara broja n.
Posmatrajmo broj $n(4n+1)-2$.
Ako je posljednja cifra broja $n(4n+1)$ veca od 2 , tada je

$$S(n(4n+1)-2)=S(n(4n+1))-2 \Rightarrow S(n(4n+1))=S(n(4n+1)-2)+2$$

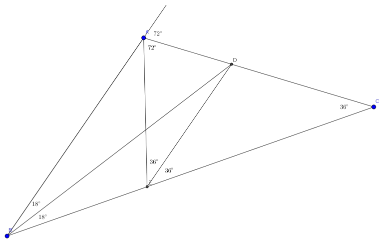
No broj $n(4n+1)-2$ je djeljiv sa tri , te je i suma njegovih cifara djeljiva sa 3.Dakle suma cifara broja $n(4n+1)$ daje ostatak 2 pri dijeljenju sa 3, pa ne moze biti jednaka 2017, jer broj 2017 pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 1.
Ako je posljednja cifra broja $n(4n+1)$ manja od 3 tada je

$$S(n(4n+1)-2)=S(n(4n+1))-2+9 \Rightarrow S(n(4n+1))=S(n(4n+1)-2)+7$$

No broj $n(4n+1)-2$ je djeljiv sa tri , te je i suma njegovih cifara djeljiva sa 3.Dakle suma cifara broja $n(4n+1)$ daje ostatak 2 pri dijeljenju sa 3, pa ne moze biti jednaka 2017, jer broj 2017 pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 1.

4.U jednakokrakom trouglu $\triangle ABC$, $(AB = BC)$ ugao pri vrhu A iznosi $108°$.Simetrala ugla $\angle ABC$ sijece stranicu AC u tacki D, a tacka E je na stranici BC, takva da je $BE = AE$.Ako se zna da je $AE = m$,izracunati ED.

Rjesenje:



Kako je $AB = AC$ to je $\angle ABC = \angle ACB = 36°$.
Kako je $EA = EB$ to je $\angle EAB = \angle EBA = 72°$.No tada je

$$\angle CAE = 108° - 36° = 72° \Rightarrow$$

AC je simetrala vanjskog ugla trougla $\triangle AEB$, te je D centar pripisane kruznice trougla $\triangle AEB$.Dakle ED je simetrala ugla $\angle AEC$. Odavde je

$$\angle DEA = \angle DEC = 36° \Rightarrow \angle ADE = 72° \Rightarrow ED = AE = m$$

57. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO TAKMIČENJE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
Bugojno, 01.04.2017. godine

DRUGI RAZRED

1. Neka je a realan broj takav da su x_1 i x_2 realni i međusobno različiti korijeni jednadžbe $x^2 - x + a = 0$. Dokazati da je $|x_1^2 - x_2^2| = 1$ ako i samo ako je $|x_1^3 - x_2^3| = 1$.

2. Dat je trougao $\triangle ABC$. Neka simetrale unutrašnjeg i vanjskog ugla kod vrha A sijeku pravu BC u tačkama D i E, redom, a kružnica opisana oko trougla $\triangle ADE$ siječe pravu AC u tački F. Pokazati da je FD simetrala ugla $\sphericalangle BFC$.

3. Naći sve različite proste brojeve p, q, r, s takve da je njihov zbir prost broj, a brojevi $p^2 + qr$ i $p^2 + qs$ su kvadrati prirodnih brojeva.

4. Neka je S skup n različitih realnih brojeva, a A_S skup aritmetičkih sredina dva različita broja iz S. Za dati $n \geq 2$ odrediti najmanji mogući broj elemenata u skupu A_S.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Sretno!

1.Neka je a realan broj takav da su x_1 i x_2 realni i medjusobno razliciti korijeni jednadzbe $x^2 - x + a = 0$.
Dokazati da je $|x_1^2 - x_2^2| = 1$ ako i samo ako je $|x_1^3 - x_2^3| = 1$

Rjesenje:

Koristeci Vijetova pravila je

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (1)$$

$$|x_1^3 - x_2^3| - 1 = |x_1 - x_2| \cdot |\frac{3}{4}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2| - 1 = |x_1 - x_2| \cdot |\frac{3}{4} + \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2| - 1 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot |x_1 - x_2| \cdot (3 + |x_1 - x_2|^2) - 1 =^{(1)} \frac{1}{4} \cdot |x_1^2 - x_2^2| \cdot (3 + |x_1^2 - x_2^2|^2) - 1 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (|x_1^2 - x_2^2|^3 + 3|x_1^2 - x_2|^2 - 4) = \frac{1}{4} \cdot (|x_1^2 - x_2^2| - 1) \cdot (|x_1^2 - x_2^2|^2 + |x_1^2 - x_2^2| + 4) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (|x_1^2 - x_2^2| - 1) \cdot [(|x_1^2 - x_2^2| + \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}]$$

Dakle imamo da je

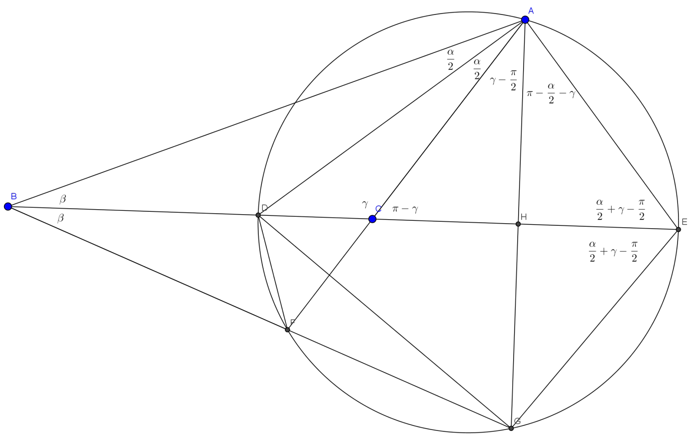
$$|x_1^3 - x_2^3| - 1 = \frac{1}{4} \cdot (|x_1^2 - x_2^2| - 1) \cdot [(|x_1^2 - x_2^2| + \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}]$$

Odakle je

$$|x_1^3 - x_2^3| - 1 = 0 \Leftrightarrow |x_1^2 - x_2^2| - 1 = 0$$

2.Dat je trougao $\triangle ABC$.Neka simetrale unutarnjeg i vanjskog ugla kod vrha A sijeku pravu BC u tackama D i E redom, a kruznica opisna oko trougla $\triangle ADE$ sijece pravu AC u tacki F.
Dokazati da je FD simetrala ugla $\angle BFC$.

Rjesenje:



Neka je $\angle BAC=\alpha, \angle ABC=\beta, \angle ACB=\gamma$
Neka je H podnozje okomice spustene iz A na BC,neka je k kruznica opisana oko trougla $\triangle ADE$. Neka k sijece pravu AH u tacki $G\neq A$.Kako je $\angle DAE=\dfrac{\pi}{2}$ to je DE precnik kruznice k te vrijedi $AH=HG$

$$\angle AFG=\angle ADG=2\angle HDA=2(\pi-\frac{\alpha}{2}-\gamma)$$

$$\angle AFD=\angle AED=\frac{\alpha}{2}+\gamma-\frac{\pi}{2}$$

$$\angle FDE=\angle FAE=\frac{\pi-\alpha}{2}\Rightarrow\angle FDB=\pi-\frac{\pi-\alpha}{2}=\frac{\pi+\alpha}{2}\Rightarrow$$

$$\angle DFB=\pi-(\beta+\frac{\pi+\alpha}{2})=\frac{\pi}{2}-\beta-\frac{\alpha}{2}$$

Sada imamo

$$\angle AFG+\angle AFD+\angle DFB=2\pi-\alpha-2\gamma+\frac{\alpha}{2}+\gamma-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\beta-\frac{\alpha}{2}=2\pi-(\alpha+\beta+\gamma)=\pi$$

Dakle tacke G,F,B su kolinearne , te je tacka D centar kruznice upisane u trougao $\triangle AFB$, dakle FD je simetrala ugla $\angle AFB$

3. Odrediti sve proste brojeve p, q, r, s takve da je njihov zbir prost broj , a brojevi $p^2 + qr$ i $p^2 + qs$ su kvadrati prirodnih brojeva.

Rjesenje:

Kako je $p + q + r + s$ prost broj to je jedan od brojeva p, q, r, s paran. Neka je $q = 2$.Tada je

$$p^2 + 2r = a^2 \land p^2 + 2s = b^2 \Rightarrow$$

$$2r = (a - p)(a + p) \land 2s = (b - p)(b + p)$$

No kako su a, b, p neparni brojevi to su $(a - p)(a + p)$ i $(b - p)(b + p)$ brojevi djeljivi sa 4 , sto nije slucaj na drugoj strani jer su r, s prosti neparni brojevi.

Neka je $r = 2$.Tada je

$$p^2 + 2q = a^2 \Rightarrow 2q = (a - p)(a + p)$$

kako su a, p neparni brojevi to je $(a - p)(a + p)$ djeljiv sa 4 , sto nije slucaj sa drugom stranom jer je q neparan prost broj.

Analogno dobijamo da $s \neq 2$.Dakle $p = 2$.Sada je

$$qr = a^2 - 4 \land qs = b^2 - 4 \Rightarrow$$

$$qr = (a - 2)(a + 2) \land qs = (b - 2)(b + 2)$$

Ako je $a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3$ tada je $a + 2 = 5$ pa nema rjesenja.

Analogno je i sa $b - 2 = 1$.

Kako je $a \neq b$ imamo dva slucaja

$$q = a - 2, r = a + 2, q = b + 2, s = b - 2$$

Sada imamo

$$a = q + 2, b = q - 2$$

te su brojevi

$$s = q - 4, q, r = q + 4$$

svi prosti.Kako je jedan od njih djeljiv sa 3 to on mora biti jednak 3.

Dobijamo sljedeca rjesenja $q = 7, s = 3, r = 11$

Razmatrajuci drugi slucaj

$$q = a + 2, r = a - 2, q = b - 2, s = b + 2$$

dobijemo rjesenja $q = 7, r = 3, s = 11$.

Dakle rjesenja su

$$(p, q, r, s) \in \{(2, 7, 3, 11), (2, 7, 11, 3)\}$$

4.Neka je S skup od n razlicitih realnih brojeva, a A_S skup aritmetickih sredina dva razlicita broja iz S.Za dati $n \geq 2$ odrediti najmanji moguci broj elemenata u skupu A_S.

Rjesenje:

Neka je

$$x_1 < x_2 < ... < x_n, x_i \in S, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

Tada je

$$\frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{x_1 + x_3}{2} < ... < \frac{x_1 + x_n}{2} < \frac{x_2 + x_n}{2} < \frac{x_3 + x_n}{2} < ... < \frac{x_{n-1} + x_n}{2}$$

Ovih brojeva ima $2n - 3$ tako da skup A_S ima najmanje $2n - 3$ razlicitih elemenata.

S druge strane za $S = \{1, 2, ..., n\}$ imamo

$$A_S = \{\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, ..., \frac{2n-1}{2}\}$$

dakle skup A_S ima tacno $2n - 3$ razlicitih elemenata.

Dakle najmanji moguci broj elemenata skupa A_S je $2n - 3$.

57. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO TAKMIČENJE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
Bugojno, 01.04.2017. godine

TREĆI RAZRED

1. U ovisnosti o realnom parametru a diskutirati rješenje nejednadžbe
$$\log_a x + |a + \log_a x| \cdot \log_{\sqrt{x}} a \geq a \log_x a.$$
u skupu realnih brojeva.

2. Neka je trougao $\triangle ABC$ jednakokraki sa $|AB| = |AC|$. Odrediti uglove trougla ako je
$$\frac{|AB|}{|BC|} = 1 + 2cos\frac{2\pi}{7}.$$

3. Neka je S skup od 6 pozitivnih realnih brojeva takav da
$$(a, b \in S)(a > b) \Rightarrow a + b \in S \text{ ili } a - b \in S.$$
Dokazati da ako ove brojeve poredamo u rastućem poretku, onda je razlika između dva susjedna člana uvijek ista.

4. Neka je dat prirodan broj N. Označimo sve njegove djelioce sa $d_1, d_2, ..., d_n$, i neka a_i predstavlja broj djelilaca broja d_i, $i = 1, 2, ..., n$. Dokazati da tada vrijedi
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3.$$
(Npr., broj $N = 6$ ima 4 djelioca $1, 2, 3, 6$ i vrijedi $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 4$ i $(1 + 2 + 2 + 4)^2 = 1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3$.)

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Sretno!

1.U ovisnosti o realnom parametru a diskutirati rjesenje nejednadzbe

$$\log_a x + |a + \log_a x| \cdot \log_{\sqrt{x}} a \geq a \cdot \log_a x$$

Rjesenje:

U.P. $0 < a \neq 1$
D.P. $0 < x \neq 1$

$$\log_a x + |a + \log_a x| \cdot \log_{\sqrt{x}} a \geq a \cdot \log_a x \Leftrightarrow$$

$$\log_a x + |a + \log_a x| \cdot \frac{2}{\log_a x} \geq \frac{a}{\log_a x}$$

Neka je $\log_a x = t$

$$\log_a x + |a + \log_a x| \cdot \frac{2}{\log_a x} \geq \frac{a}{\log_a x} \Leftrightarrow$$

$$t + |a + t| \cdot \frac{2}{t} \geq \frac{a}{t} \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2|a + t| - a}{t} \geq 0$$

i) Neka je $t > 0$

$$\frac{t^2 + 2|a + t| - a}{t} \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + 2|a + t| - a \geq 0$$

Kako je $a > 0, t > 0$ to se nejednadzba svodi na

$$t^2 + 2t + a \geq 0$$

Ako je $a > 1$ tada je ona zadovoljena za sve t.
Neka je $0 < a < 1$

$$t^2 + 2t + a \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$t \geq -1 + \sqrt{1 - a} \vee t \leq -1 - \sqrt{1 - a}$$

Kako slucaj $t \leq -1 - \sqrt{1 - a}$ ne moze biti zadovoljen zbog $t > 0$ to on nije rjesenje.No kako je $-1 + \sqrt{1 - a} < 0$ to je rjesenje nejednadzbe u ovom slucaju $t > 0$
Dakle rjesenja su

$$a > 1 \Rightarrow t > 0 \quad (1)$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow t > 0 \quad (2)$$

ii) Neka je $t < 0$

$$\frac{t^2+2|a+t|-a}{t} \geq 0 \Leftrightarrow t^2+2|a+t|-a \leq 0$$

Neka je $t \geq -a$.Tada je $-a \leq t < 0$ i imamo

$$t^2+2|a+t|-a \leq 0 \Leftrightarrow t^2+2t+a \leq 0$$

Ako je $a > 1$ ocito u ovom slucaju nema rjesenja.

Neka je $0 < a < 1$

$$t^2+2t+a \leq 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{1-a} \leq t \leq -1+\sqrt{1-a}$$

Zbog $0 < a < 1$ imamo da vrijedi

$$-1-\sqrt{1-a} < -a < -1+\sqrt{1-a} < 0$$

Dakle imamo sljedece rjesenje

$$0 < a < 1 \Rightarrow -a \leq t \leq -1+\sqrt{1-a} \quad (3)$$

Neka je $t < -a$ tada je

$$t^2+2|a+t|-a \leq 0 \Leftrightarrow t^2-2t-3a \leq 0 \Rightarrow$$

$$1-\sqrt{1+3a} \leq t \leq 1+\sqrt{1+3a}$$

Ako je $a > 1$ tada je $-a < 1-\sqrt{1+3a}$

pa u ovom slucaju nema rjesenja

Ako je $0 < a < 1$ tada je $-a > 1-\sqrt{1+3a}$ pa je presjek

$$1-\sqrt{1+3a} \leq t < -a$$

Dakle rjesenje ovog slucaja je

$$0 < a < 1 \Rightarrow 1-\sqrt{1+3a} \leq t < -a \quad (4)$$

Sumirajuci $(1), (2), (3), (4)$ imamo

$$a > 1 \Rightarrow t > 0$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow t > 0 \vee -a \leq t \leq -1+\sqrt{1-a} \vee 1-\sqrt{1+3a} \leq t < -a \Leftrightarrow$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow t \in [1-\sqrt{1+3a}, -1+\sqrt{1-a}] \cup (0, +\infty)$$

Vratimo sada smjenu

$$a > 1 \Rightarrow \log_a x > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \log_a x \in [1 - \sqrt{1+3a}, -1 + \sqrt{1-a}] \cup (0, +\infty) \Rightarrow$$

$$x \in [a^{-1+\sqrt{1-a}}, a^{1-\sqrt{1+3a}}] \cup (0, 1)$$

Dakle rjesenja su

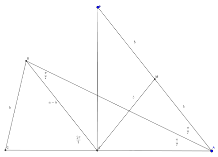
$$0 < x \neq 1, \quad a > 1$$

$$x \in [a^{-1+\sqrt{1-a}}, a^{1-\sqrt{1+3a}}] \cup (0, 1), \quad 0 < a < 1$$

2. Neka je trougao $\triangle ABC$ jednakokrak sa $AB = AC$. Odrediti uglove trougla ako je

$$\frac{AB}{BC} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}$$

Rjesenje:



Neka je $AB = AC = a$ i $BC = b$.

$$\frac{AB}{BC} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7} \Leftrightarrow \frac{a-b}{2b} = \cos\frac{2\pi}{7}$$

Neka je $\triangle PQA$ trougao sa $\angle PQA = \frac{\pi}{2}, PA = 2b, AQ = a - b$

Neka je M sredina stranice PA. Tada je $QM = b$

Neka je C tacka na pravoj AQ tako da je $AC = a, CQ = b$

Neka se prava kroz Q paralelna sa AP i simetrala ugla $\angle PAQ$ sijeku u tacki B.

Kako je $QB \parallel AP$ to je $\angle BQC = \frac{2\pi}{7}$. No $\angle BQC$ je vanjski ugao trougla $\triangle BAQ$ pa je $\angle QBA = \angle QAB = \frac{\pi}{7}$. Odavde je $BQ = QA = a - b$. Kako je $QC = b = MA$ to je $\triangle MAQ \cong \triangle BQC$

Pa imamo da je $BC = QM = b$. Sada imamo da je $\angle QBC = \angle BQC = \frac{2\pi}{7}$

Te je $\angle ABC = \angle ACB = \frac{3\pi}{7}$.

Dakle u trouglu $\triangle ABC$ su uglovi $\angle ABC = \angle ACB = \frac{3\pi}{7}$ i $\angle BCA = \frac{\pi}{7}$ i zadovoljen je uslov

$$\frac{AB}{BC} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}$$

3.Neka je S skup od 6 pozitivnih realnih brojeva takav da

$$(a,b\in S)(a>b)\Rightarrow(a+b\in S\vee a-b\in S)$$

Dokazati da ako ove elemente poredamo u rastucem poretku , onda je razlika izmedju svaka dva susjedna clana ista.

Rjesenje:

Kako S nije multiskup on ne sadrzi dva jednaka elementa. Neka je $S=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ i neka je

$$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6$$

Kako je

$$\begin{array}{c}
a_6+a_1>a_6\Rightarrow a_6+a_1\notin S\Rightarrow a_6-a_1\in S\\
a_6+a_2>a_6\Rightarrow a_6+a_2\notin S\Rightarrow a_6-a_2\in S\\
a_6+a_3>a_6\Rightarrow a_6+a_3\notin S\Rightarrow a_6-a_2\in S\\
a_6+a_4>a_6\Rightarrow a_6+a_4\notin S\Rightarrow a_6-a_4\in S\\
a_6+a_5>a_6\Rightarrow a_6+a_5\notin S\Rightarrow a_6-a_5\in S
\end{array}$$

Kako je

$$a_6-a_5<a_6-a_4<a_6-a_3<a_6-a_2<a_6-a_1<a_6$$

to imamo

$$\begin{array}{c}
a_6-a_5=a_1\\
a_6-a_4=a_2\\
a_6-a_3=a_3\\
a_6-a_2=a_4\\
a_6-a_1=a_5
\end{array}\qquad(1)$$

Kako je

$$\begin{array}{c}
a_5+a_2=a_6+a_2-a_1>a_6\Rightarrow a_5+a_2\notin S\Rightarrow a_5-a_2\in S\\
a_5+a_3=a_6+a_3-a_1>a_6\Rightarrow a_5+a_3\notin S\Rightarrow a_5-a_3\in S\\
a_5+a_4=a_6+a_4-a_1>a_6\Rightarrow a_5+a_4\notin S\Rightarrow a_5-a_4\in S
\end{array}$$

Kako je

$$a_5-a_4<a_5-a_3<a_5-a_2<a_6-a_2<a_6-a_1<a_6$$

to imamo

$$\begin{array}{c}
a_5-a_2=a_3\\
a_5-a_3=a_2\\
a_5-a_4=a_1
\end{array}\qquad(2)$$

Konacno je

$$(1) \Rightarrow \quad \begin{array}{c} a_5 - a_4 = a_2 - a_1 \\ a_4 - a_3 = a_3 - a_2 \\ a_6 = 2a_3 \end{array} \qquad (3)$$

$$(2) \Rightarrow \quad a_4 - a_3 = a_2 - a_1 \qquad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$$

Takodjer je zbog (2)

$$a_6 - a_5 = 2a_3 - a_5 = a_3 - (a_5 - a_3) = a_3 - a_2$$

Te je konacno

$$a_6 - a_5 = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$$

4.Neka je dat prirodan broj N.Oznacimo sve njegove djelioce sa $d_1, d_2, ..., d_n$ i neka je a_i broj djelilaca broja $d_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$.
Dokazati da vrijedi

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3$$

(Npr. broj $N = 6$ ima djelioce $1, 2, 3, 6$ i vrijedi
$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 4$ i $(1 + 2 + 2 + 4)^2 = 1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3$)

Rjesenje:

Neka je $N = p$ prost broj.Tada su djelioci broja p brojevi 1 i p te imamo $a_1 = 1, a_2 = 2$ vrijedi $(a_1 + a_2)^2 = a_1^3 + a_2^3$
Naka je $N = p^m$.Tada su djelioci broja N redom $1, p, p^2, ..., p^m$ no tada je

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, ..., a_m = m$$

i vrijedi

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)^2 = a_1^3 + ... + a_m^3 \Leftrightarrow$$

$$(1 + 2 + ... + m)^2 = 1^3 + 2^3 + ... + m^3 \Leftrightarrow$$

$$[\frac{m(m+1)}{2}]^2 = [\frac{m(m+1)}{2}]^2$$

sto je tacno.
Neka sada tvrdnja vrijedi za neko N i neka je $A = N \cdot p^m, (p, N) = 1$
Neka su $d_1, d_2, ..., d_n$ svi djelioci broja N,$a_1, ..., a_n$ brojevi njihovih djelilaca
Dakle vrijedi

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = a_1^3 + ... + a_n^3$$

Tada su svi djelioci broja A

$$d_1, ..., d_n, pd_1, ..., pd_n, ..., p^m d_1, ..., p^m d_n$$

Tada su brojevi njihovih djelilaca sljedeci

$$a_1, ..., a_n, 2a_1, ..., 2a_n, ..., (m + 1)a_1, ..., (m + 1)d_n$$

Dakle potrebno i dovoljno je dokazati

$$[\sum_{k=1}^{n} a_i + 2 \sum_{k=1}^{n} a_i + ... + (m+1) \sum_{k=1}^{n} a_i]^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^3 + 2^3 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^3 + ... + (m+1)^3 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^3 \Leftrightarrow$$

$$(\sum_{k=1}^{m} a_k)^2 \cdot [\frac{(m+1)(m+2)}{2}]^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^3 \cdot [1^3 + 2^3 + ... + (m+1)^3] \Leftrightarrow$$

$$(\sum_{k=1}^{m} a_k)^2 \cdot [\frac{(m+1)(m+2)}{2}]^2 = (\sum_{k=1}^{n} a_k^3) \cdot [\frac{(m+1)(m+2)}{2}]^2$$

sto je uz induktivnu pretpostavku tacno.

Kako svaki broj ima kanonsku faktorizaciju $N = \prod_{k=1}^{n} p_k^{e_k}$ to tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj.

57. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO TAKMIČENJE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
Bugojno, 01.04.2017. godine

ČETVRTI RAZRED

1. U ovisnosti o realnom parametru a diskutirati rješenje nejednadžbe

$$\log_a x + |a + \log_a x| \cdot \log_{\sqrt{x}} a \geq a \log_x a.$$

u skupu realnih brojeva.

2. U trouglu $\triangle ABC$ na stranici $\overline{AC}$ uzete su tačke K, L, M takve da je BK simetrala $\sphericalangle ABL$, BL simetrala $\sphericalangle KBM$ i BM simetrala $\sphericalangle LBC$, redom. Dokazati da je $4|LM| < |AC|$, ako vrijedi $3\sphericalangle BAC - \sphericalangle ACB < 180^\circ$.

3. Neka je dat prirodan broj N. Označimo sve njegove djelioce sa $d_1, d_2, ..., d_n$, i neka a_i predstavlja broj djelilaca broja d_i, $i = 1, 2, ..., n$. Dokazati da tada vrijedi

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3.$$

(Npr., broj $N = 6$ ima 4 djelioca $1, 2, 3, 6$ i vrijedi $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 4$ i $(1+2+2+4)^2 = 1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3$.)

4. Koliko se najviše skakača može rasporediti na šahovskoj tabli 5×5, tako da svaki od njih napada tačno dvojicu drugih skakača?

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Sretno!

1. U ovisnosti o realnom parametru a diskutirati rjesenje nejednadzbe

$$\log_a x + |a + \log_a x| \cdot \log_{\sqrt{x}} a \geq a \cdot \log_a x$$

Rjesenje:

U.P. $0 < a \neq 1$
D.P. $0 < x \neq 1$

$$\log_a x + |a + \log_a x| \cdot \log_{\sqrt{x}} a \geq a \cdot \log_a x \Leftrightarrow$$

$$\log_a x + |a + \log_a x| \cdot \frac{2}{\log_a x} \geq \frac{a}{\log_a x}$$

Neka je $\log_a x = t$

$$\log_a x + |a + \log_a x| \cdot \frac{2}{\log_a x} \geq \frac{a}{\log_a x} \Leftrightarrow$$

$$t + |a + t| \cdot \frac{2}{t} \geq \frac{a}{t} \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2|a + t| - a}{t} \geq 0$$

i) Neka je $t > 0$

$$\frac{t^2 + 2|a + t| - a}{t} \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + 2|a + t| - a \geq 0$$

Kako je $a > 0, t > 0$ to se nejednadzba svodi na

$$t^2 + 2t + a \geq 0$$

Ako je $a > 1$ tada je ona zadovoljena za sve t.
Neka je $0 < a < 1$

$$t^2 + 2t + a \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$t \geq -1 + \sqrt{1 - a} \vee t \leq -1 - \sqrt{1 - a}$$

Kako slucaj $t \leq -1 - \sqrt{1 - a}$ ne moze biti zadovoljen zbog $t > 0$ to on nije rjesenje.No kako je $-1 + \sqrt{1 - a} < 0$ to je rjesenje nejednadzbe u ovom slucaju $t > 0$
Dakle rjesenja su

$$a > 1 \Rightarrow t > 0 \quad (1)$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow t > 0 \quad (2)$$

ii) Neka je $t < 0$

$$\frac{t^2+2|a+t|-a}{t} \geq 0 \Leftrightarrow t^2+2|a+t|-a \leq 0$$

Neka je $t \geq -a$.Tada je $-a \leq t < 0$ i imamo

$$t^2+2|a+t|-a \leq 0 \Leftrightarrow t^2+2t+a \leq 0$$

Ako je $a > 1$ ocito u ovom slucaju nema rjesenja.

Neka je $0 < a < 1$

$$t^2+2t+a \leq 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{1-a} \leq t \leq -1+\sqrt{1-a}$$

Zbog $0 < a < 1$ imamo da vrijedi

$$-1-\sqrt{1-a} < -a < -1+\sqrt{1-a} < 0$$

Dakle imamo sljedece rjesenje

$$0 < a < 1 \Rightarrow -a \leq t \leq -1+\sqrt{1-a} \quad (3)$$

Neka je $t < -a$ tada je

$$t^2+2|a+t|-a \leq 0 \Leftrightarrow t^2-2t-3a \leq 0 \Rightarrow$$

$$1-\sqrt{1+3a} \leq t \leq 1+\sqrt{1+3a}$$

Ako je $a > 1$ tada je $-a < 1-\sqrt{1+3a}$

pa u ovom slucaju nema rjesenja

Ako je $0 < a < 1$ tada je $-a > 1-\sqrt{1+3a}$ pa je presjek

$$1-\sqrt{1+3a} \leq t < -a$$

Dakle rjesenje ovog slucaja je

$$0 < a < 1 \Rightarrow 1-\sqrt{1+3a} \leq t < -a \quad (4)$$

Sumirajuci $(1), (2), (3), (4)$ imamo

$$a > 1 \Rightarrow t > 0$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow t > 0 \vee -a \leq t \leq -1+\sqrt{1-a} \vee 1-\sqrt{1+3a} \leq t < -a \Leftrightarrow$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow t \in [1-\sqrt{1+3a}, -1+\sqrt{1-a}] \cup (0, +\infty)$$

Vratimo sada smjenu

$$a > 1 \Rightarrow \log_a x > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \log_a x \in [1 - \sqrt{1+3a}, -1 + \sqrt{1-a}] \cup (0, +\infty) \Rightarrow$$

$$x \in [a^{-1+\sqrt{1-a}}, a^{1-\sqrt{1+3a}}] \cup (0, 1)$$

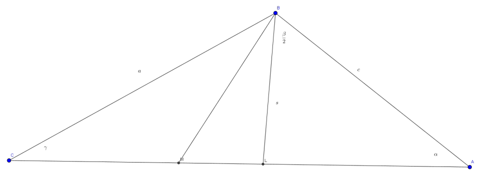
Dakle rjesenja su

$$0 < x \neq 1, \quad a > 1$$

$$x \in [a^{-1+\sqrt{1-a}}, a^{1-\sqrt{1+3a}}] \cup (0, 1), \quad 0 < a < 1$$

2.U trouglu $\triangle ABC$ je L podnozje simetrale ugla $\angle ABC$, na stranici AC, tacka M je podnozje simetrale ugla $\angle LBC$ na stranici LC.Dokazati da je $4LM < AC$ ako je $3\angle BAC - \angle ACB < \pi$

Rjesenje:



Neka je

$$\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma, AB = c, BC = a, CA = b, BL = s$$

Iz teoreme o simetrali ugla je

$$\frac{AL}{CL} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{AL + CL}{CL} = \frac{c+a}{a} \Rightarrow CL = \frac{ab}{c+a}$$

Kako je BM simetrala ugla $\angle LBC$ to je

$$LM = \frac{LC \cdot BL}{BL + BC} = \frac{ab}{c+a} \cdot \frac{s}{s+a} = \frac{ab}{c+a} \cdot (1 - \frac{a}{s+a})$$

Imamo da je

$$\angle BLA = \pi - \alpha - \frac{\beta}{2} = \frac{\pi - \alpha + \gamma}{2}$$

Kako vrijedi $3\alpha - \gamma < \pi$ to je $\gamma > 3\alpha - \pi$ te je

$$\angle BLA = \frac{\pi - \alpha + \gamma}{2} > \alpha \Rightarrow s < c$$

Sada imamo

$$LM = \frac{ab}{c+a} \cdot (1 - \frac{a}{s+a}) < \frac{ab}{c+a} \cdot (1 - \frac{a}{c+a}) = \frac{abc}{(c+a)^2} \leq \frac{abc}{4ac} = \frac{b}{4}$$

4.Neka je dat prirodan broj N.Oznacimo sve njegove djelioce sa $d_1, d_2, ..., d_n$ i neka je a_i broj djelilaca broja $d_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$.
Dokazati da vrijedi

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3$$

(Npr. broj $N = 6$ ima djelioce $1, 2, 3, 6$ i vrijedi
$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 4$ i $(1 + 2 + 2 + 4)^2 = 1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3$)

Rjesenje:

Neka je $N = p$ prost broj.Tada su djelioci broja p brojevi 1 i p
te imamo $a_1 = 1, a_2 = 2$ vrijedi $(a_1 + a_2)^2 = a_1^3 + a_2^3$
Naka je $N = p^m$.Tada su djelioci broja N redom $1, p, p^2, ..., p^m$ no tada je

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, ..., a_m = m$$

i vrijedi

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)^2 = a_1^3 + ... + a_m^3 \Leftrightarrow$$

$$(1 + 2 + ... + m)^2 = 1^3 + 2^3 + ... + m^3 \Leftrightarrow$$

$$[\frac{m(m+1)}{2}]^2 = [\frac{m(m+1)}{2}]^2$$

sto je tacno.
Neka sada tvrdnja vrijedi za neko N i neka je $A = N \cdot p^m, (p, N) = 1$
Neka su $d_1, d_2, ..., d_n$ svi djelioci broja N,$a_1, ..., a_n$ brojevi njihovih djelilaca
Dakle vrijedi

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = a_1^3 + ... + a_n^3$$

Tada su svi djelioci broja A

$$d_1, ..., d_n, pd_1, ..., pd_n, ..., p^m d_1, ..., p^m d_n$$

Tada su brojevi njihovih djelilaca sljedeci

$$a_1, ..., a_n, 2a_1, ..., 2a_n, ..., (m+1)a_1, ..., (m+1)d_n$$

Dakle potrebno i dovoljno je dokazati

$$[\sum_{k=1}^{n} a_i + 2\sum_{k=1}^{n} a_i + ... + (m+1)\sum_{k=1}^{n} a_i]^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^3 + 2^3 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^3 + ... + (m+1)^3 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^3 \Leftrightarrow$$

$$(\sum_{k=1}^{m} a_k)^2 \cdot [\frac{(m+1)(m+2)}{2}]^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^3 \cdot [1^3 + 2^3 + ... + (m+1)^3] \Leftrightarrow$$

$$(\sum_{k=1}^{m} a_k)^2 \cdot [\frac{(m+1)(m+2)}{2}]^2 = (\sum_{k=1}^{n} a_k^3) \cdot [\frac{(m+1)(m+2)}{2}]^2$$

sto je uz induktivnu pretpostavku tacno.

Kako svaki broj ima kanonsku faktorizaciju $N = \prod_{k=1}^{n} p_k^{e_k}$ to tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj.

4.Koliko se najvise skakaca moze rasporediti na sahovskoj tabli 5×5 tako da svaki od njih napada tacno dva od ostalih skakaca.

Rjesenje:

Bez ogranicenja opstosti mozemo uzeti da su polja u uglu table crna.
Kako svaki skakac napada tacno dva druga to je broj zauzetih crnih polja jednak broju zauzetih bijelih polja.Dakle ako je broj praznih bijelih polja jednak n tada je broj praznih crnih polja jednak $n+1$.
Neka skakac stoji na centralnom polju koje je crno.Tada je broj praznih bijelih polja bar 6 te je broj praznih crnih polja jednak 7.Dakle najveci broj skakaca na tabli je

$$25 - 6 - 7 = 12$$

Pretpostavimo sada da na centralnom polju nema skakaca.Podijelimo bijela polja na dijelove kao na slici

	3		3	
1		4		2
	2		1	
1		3		2
	4		4	

Pretpostavimo da je dio ispunjen brojem 1 pokriven skakacima a, b, c
Tada sa donje slike imamo

		d		
a	f			
			c	
b	e			
		g		

Kako skakac sa polja a mora napadati bar dva skakaca, a centralno polje je prazno to na e i d mora biti skakac.
Analogno posmatrajuci skakaca na b moraju biti skakaci na poljima f i g.No kako na c stoji skakac to on napada cetiri druga skakaca , sto je kontradikcija.
Dakle svaki od dijelova sa istim brojem mora imati bar jedno polje na kome ne stoji skakac.Pa je broj praznih bijelih polja najmanje 4 dakle broj crnih polja je najmanje 5, pa se na tabli nalazi najvise $25 - 4 - 9 = 16$ skakaca.
Kako znamo da svaki od dijelova na slici mora imati bar po jedno prazno polje lahko konstruiramo sljedeci raspored

	S	S	S	
S	S		S	S
S				S
S	S		S	S
	S	S	S	