XXII Federalno takmičenje iz fizike za učenike srednjih škola

United World College, Mostar

08. 04. 2017.

GRUPA A- MEHANIKA I TERMODINAMIKA

ZADATAK 1 (15 bodova)

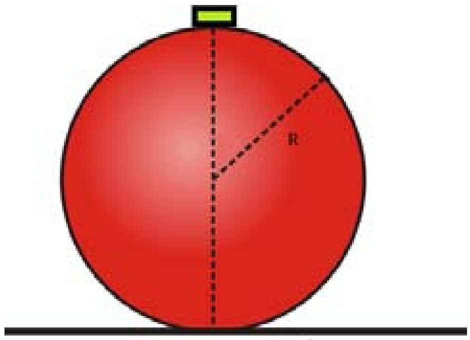
Posmatrajmo malo tijelo koje je postavljeno na vrh velike sfere poluprečnika **R** (slika 1).

a) Koliku brzinu, u horizontalnom pravcu, bi se moralo saopštiti tom malom tijelu da njegov domet bude **5R**? Smatrati da se tijelo, kada mu se saopšti brzina, trenutno odvoji od podloge, i da ne postoji nikakvo trenje između tijela i kugle. Također zanemariti otpor vazduha tokom kretanja tijela.

b) Koliko iznosi vrijeme padanja malog tijela?

c) Koliki je intenzitet brzine tog malog tijela u trenutku kada padne na tlo?

d) Odrediti minimalnu početnu brzinu $\boldsymbol{v_{min}}$ tako da za sve vrijednosti početne brzine $\boldsymbol{v} > \boldsymbol{v_{min}}$ (ponovo u horizontalnom pravcu) tijelo neće dotaknuti sferu tijekom kretanja.



Slika 1

ZADATAK 2 (20 bodova)

Bilijarska kugla poluprečnika $\boldsymbol{R}$ se kotrlja bez proklizavanja na ravnom glatkom stolu, tačno prema nama. Kuglu udarimo štapom (brzim i horizontalnim trzajem iz lakta), tako da se odmah poslije sudara kugla udaljava od nas istom translatornom brzinom kao na početku, ali bez kortljanja. Kuglu smo udarili na visini h od površine stola.

a) Koliki treba biti odnos **h/R** da bi ovo bilo moguće?

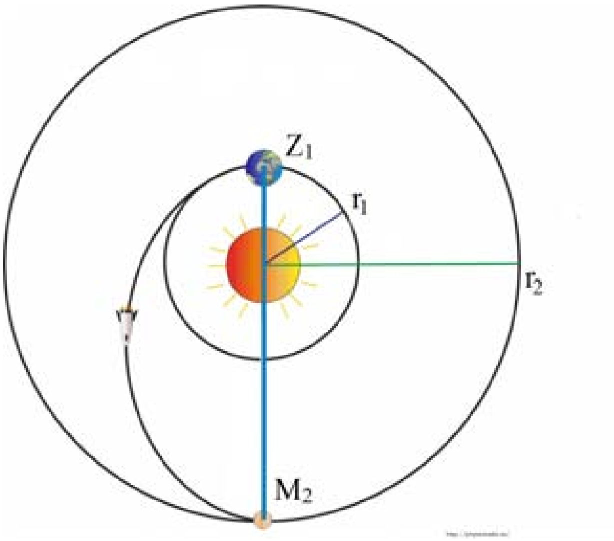
b) Koliki je taj odnos u slučaju kada se kugla vraća nazad kortljajući se proizvoljnom ugaonom brzinom?

c) Kolika je relativna promjena energije kugle prije i poslije udarca u slučaju a), a kolika u slučaju b) ako se u ovom slučaju pri udarcu njena ugaona brzina tri puta smanji?

ZADATAK 3 (25 bodova)

Elon Musk, osnivač "Tesla motorsa" i "Space- X" programa, javnosti je predstavio plan naseljavanja Marsa. Naime, Musk tvrdi da je na Marsu moguć održiv život, te da će uskoro doći vrijeme kada će biti potrebno naseliti drugo stanište, uslijed naglog porasta broja ljudi na Zemlji. Međutim, plan nije dovršen u potpunosti, pa je potrebno izvršiti proračune u vezi navedenog poduhvata.

Ukoliko kretanje planeta oko Sunca aproksimiramo jednolikim kružnim kretanjem, možemo reći da se Zemlja kreće oko Sunca sa periodom revolucije $\boldsymbol{T_1}$ i radijusom putanje $\boldsymbol{r_1}$, dok je period revolucije Marsa $\boldsymbol{T_2}$. Svemirski brod potrebno je, dakle, poslati sa Zemlje na Mars. Energetski najpovoljnija putanja jeste tzv. Hohmannova putanja- putanja u obliku poluelipse sa početnom tačkom na putanji Zemlje (Z_1) i krajnjom tačkom na putanji Marsa (M_2), pri čemu tačke moraju ležati na suprotnim stranama u odnosu na Sunce.



a) Odrediti radijus putanje Marsa $\boldsymbol{r_2}$, kao i brzinu Marsa $\boldsymbol{v_M}$.

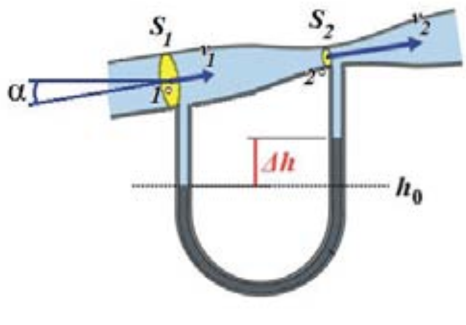
b) Odrediti dužinu velike poluose Hohmannove putanje $\boldsymbol{a}$, trajanje leta svemirskog broda od Zemlje do Marsa po ovoj putanji $\boldsymbol{t}$ i položaj Marsa M_1 u trenutku lansiranja broda (termin položaj odnosi se na ugaoni pomak) $\boldsymbol{\varphi}$.

c) Pilot broda je nakon lansiranja uključio "autopilot" i napustio pilotsku kabinu. Pri povratku u kabinu uvidio je da "autopilot" nije isprogramiran dobro, te da se brod kreće jednoliko kružno oko Sunca, sa radijusom putanje $\boldsymbol{R}$ koji odgovara 2/3 $\boldsymbol{r_1}$ i brzinom $\boldsymbol{v_0}$. Odrediti promjenu brzine $\boldsymbol{\Delta v}$ koju letjelica treba postići tako da se vrati na kružnu putanju radijusa $\boldsymbol{r_1}$ (Povratak na kružnu putanju ostvarit će se ponovnim Hohmannovim manevrom- pilot će na veoma kratak vremenski period upaliti motore broda uslijed čega će postići traženu promjenu brzine. **NAPOMENA**: smatrati da će brod ostati na istoj udaljenosti od Sunca dok ne postigne promjenu brzine.).

Mase broda i Sunca su $\boldsymbol{m}$ i $\boldsymbol{M_S}$, respektivno, a univerzalna gravitaciona konstanta $\boldsymbol{\gamma}$. Zanemariti sva trenja i gubitke.

ZADATAK 4 (20 bodova

Za određivanje relativne brzine letjelica u odnosu na vazduh koriste se Pitot i Venturi cijevi- uređaji za mjerenje brzine strujanja fluida, bazirani na mjerenju pritiska. Venturijeva cijev radi na principu istoimenog efekta: pri proticanju fluida kroz cijev, na mjestu gdje je cijev sužena, dolazi do smanjenja pritiska i povećanju brzine strujanja fluida. Venturijeva cijev daje preciznije rezultate u odnosu na standardnu Pitot cijev, ali uz nedostatak ograničenog mjernog opsega- u praksi se koristi pri manjim brzinama leta. Naime, pri relativno niskim brzinama, na mjestu gdje je cijev sužena, zrak postiže velike brzine strujanja- kada se brzina strujanja izjednači sa lokalnom brzinom zvuka, daljnim povećanjem brzine letjelice neće se povećavati maseni protok zraka kroz cijev- dolazi do "gušenja" protoka.



Slika 3
Venturijeva cije

Avion "Cessna 172" opremljen je uređajem sa slike. Poprečni presjeci cijevi u tačkama 1° i 2° jesu krugovi, sa poluprečnicima R_1 i R_2, respektivno, tako da vrijedi $R_1/R_2 = 2$, a uslijed greške u konstrukciji, osa "ravne" cijevi postavljena je pod uglom $\alpha=30°$ u odnosu na osu aviona. "U" cijev napunjena je živom. Ukoliko je strujanje vazduha kroz cijev stacionarno, a sam vazduh nestišljiv pri brzinama manjim od brzine zvuka, odrediti brzinu aviona ukoliko je visinska razlika nivoa žive Δh = **0,5 m**, a dužina "ravnog" dijela cijevi između tačaka 1° i 2°, $x = 1$ **m**. Da li je opravdano korištenje Venturijeve cijevi pri ovoj brzini? Brzina zvuka u vazduhu iznosi 340 m/, gravitaciono ubrzanje 9,81m/s^2, dok je živa 11000x gušća od vazduha. Smatrati da vazduh miruje u odnosu na Zemlju.

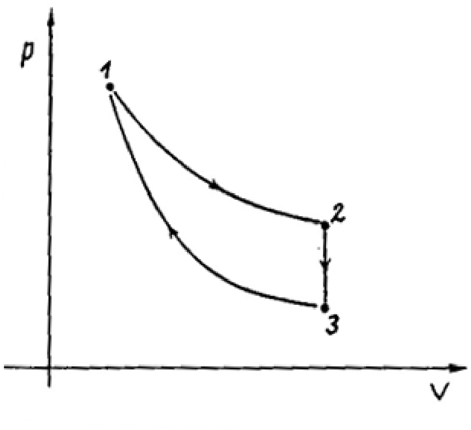
ZADATAK 5 (20 bodova)

Kružni ciklus se sastoji od izohore, adijabate i izoterme (slika), pri čemu se izotermski proces vrši pri maksimalnoj temperaturi ciklusa. Radno tijelo je idealni gas. Odnos maksimalne i minimalne temperature u toku ciklusa je poznat: $\frac{T_{max}}{T_{min}} = \tau$. Koliki je stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine čiji se rad zasniva na ovom kružnom ciklusu?

Stepen korisnog dejstva idealne toplotne mašine je definisan kao:

$$\eta = \frac{A}{Q_{in}}$$

gdje A predstavlja ukupan rad koji izvrši toplotna mašina u toku jednog ciklusa, a Q_{in} predstavlja količinu toplote koja se dovede toplotnoj mašini u toku jednog ciklusa.



Slika 4:
Razmatrani kružni ciklus. Proces 1 → 2 predstavlja izotermni, 2 → 3 izohorni, a 3 → 1 adijabatski proces

RJEŠENJE

Zadatak 1

a) i b)

Vežimo ishodište koordinatnog sistema za dodirnu tačku velike kugle i tla. X osu ćemo postaviti horizontalno, sa pozitivnim smjerom prema desno, a Y osu vertikalno, prema gore. Kako se radi o kretanju u polju sile Zemljine teže, sa početnom brzinom koja je paralelna tlu, naš problem se ustvari svodi na horizontalni hitac.

Za kretanje po x-osi imamo:

$$x(t) = vt \text{ } (\mathbf{1\ bod})$$

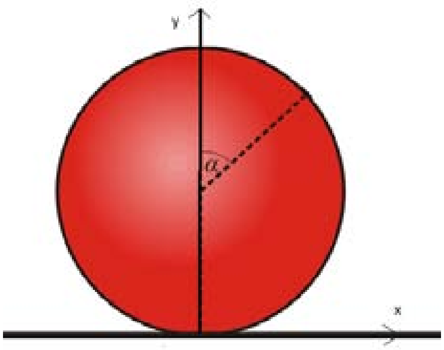
dok za kretanje po y osi imamo da je:

$$y(t) = H - \frac{gt^2}{2} \text{ } (\mathbf{1\ bod})$$

U trenutku pada na tlo t_py komponenta vektora položaja je 0, odnosno vrijedi da je:

$$y(t_p) = H - \frac{gt_p^2}{2} = 0 \Rightarrow t_p^2 = \frac{2H}{g} = \frac{4R}{g} (\mathbf{1.5\ bodova})$$

Korijenovanjem dobijamo traženi rezultat pod b).



Uvrštavanjem u relaciju za x komponentu vektora položaja, te pošto je domet D ustvari vrijednost $x(t)$ u trenutku pada t_p ($D = x(t_p)$) imamo:

$$D = v\sqrt{\frac{2H}{g}} \text{ } (\mathbf{1.5\ bodova})$$

Odavde možemo izraziti početnu brzinu:

$$v = D\sqrt{\frac{g}{2H}} = 5R\sqrt{\frac{g}{4R}} = \frac{5}{2}\sqrt{gR} \text{ } (\mathbf{1\ bod})$$

c) Na osnovu zakona održanja energije, gdje na početku imamo samo gravitacionu potencijalnu, a na kraju samo kinetičku energiju (za referentni nivo uzimamo visinu na kojoj se nalazi tlo):

$$mgH = \frac{mv^2}{2} (\mathbf{2\ boda})$$

iz čega slijedi da je

$$v = \sqrt{2gH} = 2\sqrt{gR} \text{ } (\mathbf{1\ bod})$$

d) Za određenu početnu brzinu v postoje dvije mogućnosti; prva jeste da će tijelo pasti na gornji dio velike kugle, zbog premale početne brzine, dok je druga moćunost da tijelo uopće ne dodirne veliku kuglu tokom svog kretanja. U graničnom slučaju, tijelo će, nakon što mu je saopštena početna brzina v_{min} dotaknuti veliku kuglu u tački$(x, y) = (R, R)$ u odnosu na naš odabran koordinatni sistem; za početnu brzinu $v > v_{min}$ tijelo će bez kontakta sa velikom kuglom vršiti svoje kretanje. Iz uslova da su u istom trenutku x i y koordinata tijela R, imamo:

$$x(t_1) = vt_1 = R$$ **(1.5 bodova)**

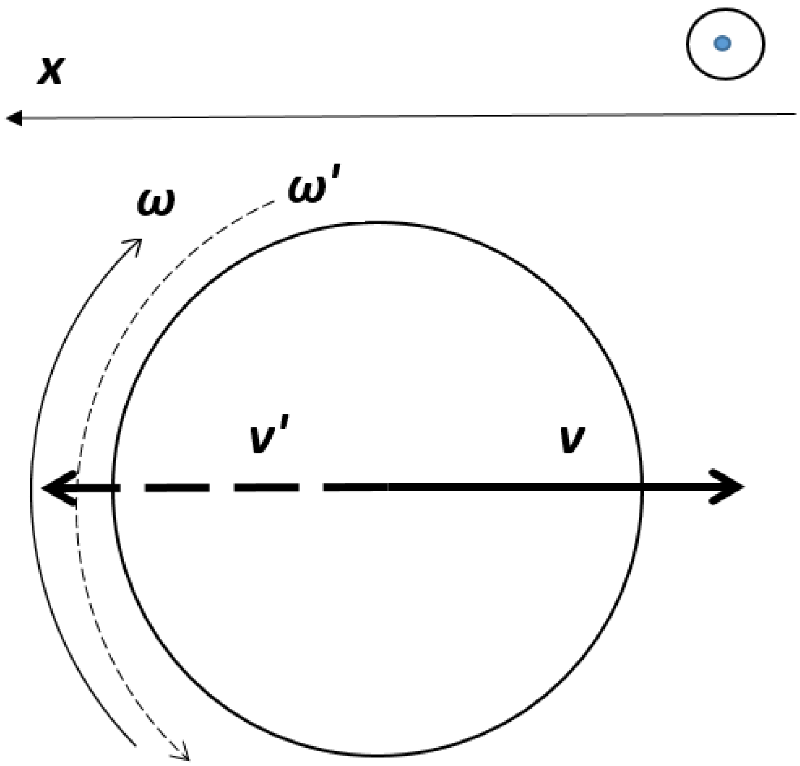
$$y(t_1) = H - \frac{gt_1^2}{2} = R$$ **(1.5 bodova)**

Eliminacijom trenutka t_1 i uvrštavanjem $H = 2R$ dobijamo da je:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{gR}{2}}$$ **(3 boda)**

Zadatak 2

Na sici su prikazane linearne brzine prije udarca (pune linije) kao i odgovarajuće ugaone brzine poslije udarca (isprekidane linije) u odnosu na koordinatni sistem na slici.



a) U ovom slučaju

$$v = -v', \omega' = 0.$$

Ako je translatorna brzina kugle kada se približava jednaka $-v$, **1b**

kada se udaljava je$v$ **1b**

pa je promjenabrzine prilikom udarca $2v$. **1b**

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = F,$$

$$2mv = F\,\Delta t$$ **...(*)1b**

F je sila kojom štap djeluje na kuglu, Δtvremenski interval.

Moment impulsa prije udarca je$-\ I\omega$, **1b**

a poslije jednak je 0, **1b**

promjena je jednaka$I\omega$. **1b**

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = M,$$

$$I\omega = F\Delta t R sin\alpha,$$ **1b**

gdje je ugao određen sa

$sin\alpha = \frac{h}{R} - 1$ **1b**

kao na slici ispod.

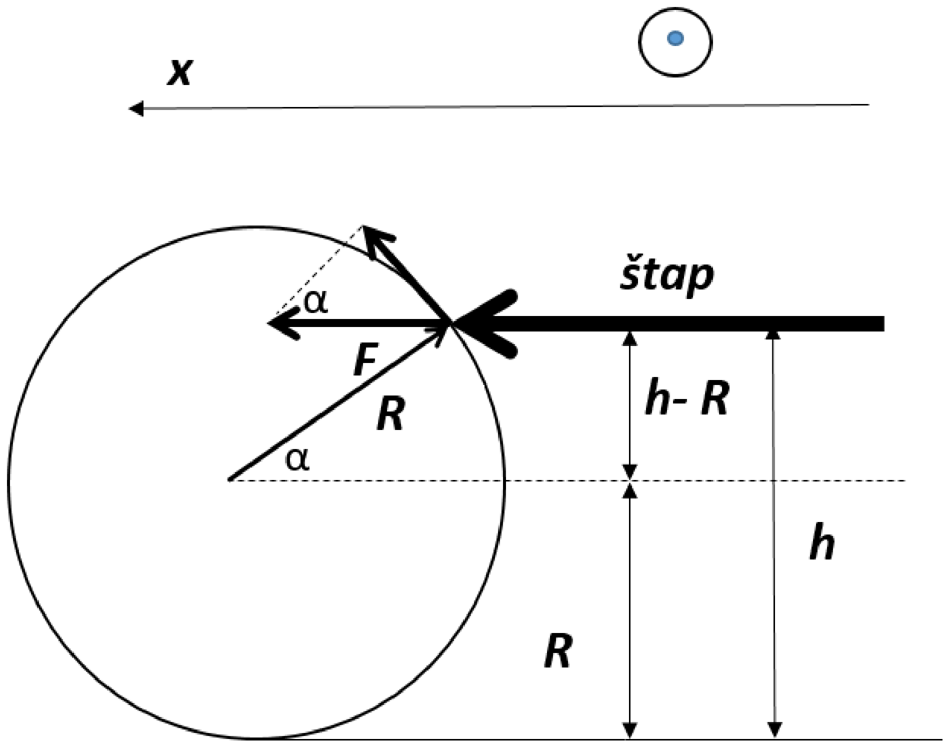
Imamo:$I\omega = F\Delta t(h - R)$.

Uslov da nema proklizavanja $v = \omega R$, **1b**

odnosno ako uvrstimo u zadnju jednačinu:

$I\frac{v}{R} = F\Delta t(h - R)...$ (**) **1b**

Diobom (*) i (**) imamo: $\frac{h}{R} = \frac{I}{2mR^2} + 1 = 1{,}2$ **1b**



b) U ovom slučaju:

- prije udarca:

  translacija: $-v$,

  rotacija $-\omega$.

- poslije udarca:

  translacija: v', **1b**

  rotacija ω'. **1b**

Uslovi da nema proklizavanja: $v = \omega R, v' = \omega' R$. **1b**

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = F,$$

$m(v' + v) = F\Delta t$ ..(#) **1b**

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = FR\sin\alpha,$$

$I(\omega' + \omega) = FR\sin\alpha\,\Delta t$ ... (##) **1b**

Diobom (#) i (##) imamo:

$$\frac{m}{I}\frac{v' + v}{\omega' + \omega} = \frac{1}{R\sin\alpha},$$

$$\frac{m}{\frac{2}{5}mR^2}\frac{\omega' R + \omega R}{\omega' + \omega} = \frac{1}{h - R},$$

$\frac{h}{R} = 1{,}4$ **1b**

c)

Za slučaj a)

$$\varepsilon = \frac{E'}{E} - 1 =$$

$$\frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2} - 1 =$$

$\frac{mR^2\omega^2}{\frac{2}{5}mR^2\omega^2 + m\omega^2R^2} - 1 = -28{,}57\%,$ **1b**

za slučaj b)

$$\varepsilon = \frac{E'}{E} - 1 =$$

$$\frac{\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I\omega'^2}{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2} - 1 =$$

$\frac{m\omega'^2R^2 + \frac{2}{5}mR^2\omega'^2}{m\omega^2R^2 + \frac{2}{5}mR^2\omega^2} - 1 = -88{,}89\%.$ **1b**

Zadatak 3.

) Prema trećem Keplerovom zakonu odnos kvadrata perioda revolucije i kuba velike poluose (u našem slučaju putanje planeta aproksimirane su kružnicama pa umjesto polusa imamo radijuse) isti je za sve planete, pa vrijedi:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}\ (\boldsymbol{2b}),$$

odakle dobijamo:

$$r_2 = r_1 (\frac{T_2}{T_1})^{\frac{2}{3}}\ (\boldsymbol{1b}).$$

Kako se Mars kreće jednoliko kružno oko Sunca, sa radijusom putanje $\mathbf{r_2}$, brzinu $\mathbf{v_M}$ možemo dobiti kao odnos obima kružnice radijusa $\mathbf{r_2}$ i perioda revolucije Marsa $\mathbf{T_2}$:

$$v_M = \frac{2r_2\pi}{T_2}\ (\boldsymbol{1b}),$$

Uvrštavanjem prethodno dobijenog r_2 dobijamo:

$$v_M = \frac{2r_1\pi}{(T_2 T_1^2)^{\frac{1}{3}}}\ (\boldsymbol{1b}).$$

b) Sa slike možemo vidjeti da vrijedi:

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}\ (\boldsymbol{1b}).$$

Ponovnom primjenom Keplerovog trećeg zakona, uz primjedbu da je traženo vrijeme poluperiod revolucije broda oko Sunca, dobijamo:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{(2t)^2}{a^3}\ (\boldsymbol{1b}),$$

$$t = \frac{T_1}{2}(\frac{a}{r_1})^{\frac{3}{2}}\ (\boldsymbol{1b}).$$

Položaj Marsa u trenutku lansiranja broda možemo iz jednostavne proporcije (za vrijeme $\mathbf{T_2}$ Mars napravi puni krug koji odgovara uglu 2π, a za vrijeme $\mathbf{t}$ Mars će opisati traženi ugao $\boldsymbol{\varphi}$):

$$\frac{T_2}{t} = \frac{2\pi}{\varphi}\ (\boldsymbol{1b}),$$

$$\varphi = 2\pi\frac{t}{T_2} = 2\pi\frac{\frac{T_1}{2}(\frac{a}{r_1})^{\frac{3}{2}}}{T_2}\ (\boldsymbol{1b}).$$

c) Ukoliko brod vrši uniformno kružno kretanje sa radijusom **R** (udaljenost tačke na obodu kružne putanje od centra Sunca) oko Sunca, privlačna gravitaciona sila $\mathbf{F_g}$ poprima karakter centripetalne sile $\mathbf{F_{cp}}$, pa vrijedi:

$$\overrightarrow{F_g} = \overrightarrow{F_{cp}},$$

odnosno:

$$F_g = F_{cp} \ (\mathbf{1b}).$$

Intenziteti gravitacione i centripetalne sile koje djeluju na brod mase **m** koji se kreće kružno oko Sunca konstantnom tangencijalnom brzinom $\mathbf{v_0}$ na udaljenosti **R** od centra Sunca, dati su kao:

$$F_g = \gamma \frac{m \cdot M_S}{R^2} \ (\mathbf{1b}) \ , \ F_{cp} = m \frac{v_0^2}{R} (\mathbf{1b}),$$

respektivno. Uvrštavanjem **R** = 2/3 $\mathbf{r_1}$ i izjednačavanjem intenziteta navedenih sila dobijamo:

$$m \frac{v_0^2}{\frac{2}{3} r_1} = \gamma \frac{m \cdot M_S}{(\frac{2}{3} r_1)^2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\gamma \frac{M_S}{r_1}} \approx 1{,}22 \sqrt{\gamma \frac{M_S}{r_1}} \ (\nabla)(\mathbf{2b}).$$

Da bi brod dostigao na prvobitnu putanju $\mathbf{r_1}$, potrebno je upaliti motore na kratak vremenski interval kao što je navedeno u tekstu zadatka. Pri tome će brod dostići brzinu $\mathbf{v_1}$:

$$v_1 = v_0 + \Delta v \ (*).$$

Nakon što je brod postigao brzinu $\mathbf{v_1}$, motor se gasi- brod se kreće u gravitacionom polju Sunca. Kako je gravitaciono polje konzervativno, kažemo da vrijede zakoni očuvanja energije (mehaničke) i momenta impulsa (ZOE i ZOMI).

ZOE:

$$E = E_k + E_p = const. (\mathbf{1b})$$

*Kinetička energija tijela mase **m** koje vrši translatorno kretanje brzinom **v** i potencijalna energija istog tijela u gravitacionom polju Sunca na udaljenosti **r** od centra Sunca date su kao:*

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2} \ (\mathbf{1b}) \ , \qquad E_p = -\gamma \frac{m \cdot M_S}{r} (\mathbf{1b}),$$

*respektivno. Prema **ZOE**, mehaniča energija broda u trenutku neposredno nakon postizanja brzine v1 na udaljenosti* **R** = 2/3 $\mathbf{r_1}$ *od centra Sunca, jednaka je mehaničkoj energiji broda kada orbitira oko Sunca na udaljenosti* $\mathbf{r_1}$ *sa novom brzinom* $\mathbf{v_2}$*:*

$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} - \gamma \frac{m \cdot M_S}{\frac{2}{3} r_1} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \gamma \frac{m \cdot M_S}{r_1} \ (\mathbf{1b}) \ ,$$

$$v_1^2 = v_2^2 + \gamma \frac{M_S}{r_1} \ (**)(\mathbf{1b}).$$

Kretanje u početnom i krajnjem trenutku jeste uniformno kružno kretanje, pa umjesto vektora momenta impulsa

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v}\,,$$

možemo koristiti intenzitet momenta impulsa (vektori položaja i brzine međusobno su okomiti, te uvijek leže u istoj ravni- ravni kretanja broda) , pa vrijedi:

$$m(\frac{2}{3}r_1)v_1 = mr_1v_2\ (\mathbf{1}\boldsymbol{b}),$$

odakle dobijamo:

$$v_2 = \frac{2}{3}v_1\ (\mathbf{1}\boldsymbol{b}).$$

Uvrštavanjem dobijenog rezultata u relaciju (**) dobijamo:

$$v_1 = \frac{3}{5}\sqrt{5}\sqrt{\gamma\frac{M_S}{r_1}} \approx\ 1{,}34\ \sqrt{\gamma\frac{M_S}{r_1}}\ (\Delta)(\mathbf{2}\boldsymbol{b}).$$

Konačno, uvrštavanjem rezultata (∇) i (Δ) u relaciju (*), dobijamo:

$$\Delta v = 0{,}12\sqrt{\gamma\frac{M_S}{r_1}}\ (\mathbf{1}\boldsymbol{b})$$

Zadatak 4.

Zadatak rješavamo primjenom Bernulijeve (*) i jednačine kontinuiteta (**):

$$p + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = const.\ (*)\ (\mathbf{1}\boldsymbol{b});\quad Sv = const.\ (**)\ (\mathbf{1}\boldsymbol{b})$$

U našem slučaju vrijedi:

$$p_1 + \rho_{vazduha}gh_1 + \frac{\rho_{vazduha}v_1^2}{2} = p_2 + \rho_{vazduha}gh_2 + \frac{\rho_{vazduha}v_2^2}{2}\ (\mathbf{1}\boldsymbol{b})$$

$$S_1v_1 = S_2v_2\ \Rightarrow v_2 = v_1\frac{S_1}{S_2}.\,(\mathbf{1}\boldsymbol{b})$$

Kako su $\boldsymbol{S_1}$ i $\boldsymbol{S_2}$ kružne površine čiji radijusi se odnose kao $\boldsymbol{R_1/R_2 = 2}$, vrijedi:

$$v_2 = v_1\frac{S_1}{S_2} = v_1\frac{R_1^2\pi}{R_2^2\pi} = 4v_1\ (\mathbf{1}\boldsymbol{b}).$$

Uvrštavanjem dobijenog rezultata Bernulijevu jednačinu dobijamo:

$$v_1^2 = \frac{2}{15}\left[\frac{p_1 - p_2}{\rho_{vazduha}} - g(h_2 - h_1)\right] (\mathbf{3}\boldsymbol{b}).$$

Razlika visina $\boldsymbol{h_2 - h_1}$ može se izraziti preko udaljenosti tačaka 1° i 2°, $\boldsymbol{x}$:

$$h_2 - h_1 = xsin\alpha = 0{,}5\ m\ (\mathbf{1}\boldsymbol{b}).$$

Kako rukavci "U" cijevi predstavljaju spojenu posudu, razlika statičkih pritisaka $\boldsymbol{p_1}$ i $\boldsymbol{p_2}$ odgovarat će hidrostatičkom pritisku što ga stvara stub žive visine $\boldsymbol{\Delta h}$:

$$p_1 - p_2 = \rho_{žive} g\Delta h\ (\mathbf{2}\boldsymbol{b}),$$

Slijedi:

$$v_1^2 = \frac{2}{15}g\left[\frac{\rho_{žive}}{\rho_{vazduha}}\Delta h - (h_2 - h_1)\right] (\mathbf{3}\boldsymbol{b}).$$

Uvrštavanjem vrijednosti dobijamo:

$$v_1 = 84{,}81\ \frac{m}{s}\ (\mathbf{1}\boldsymbol{b}).$$

Kako je cijev postavljena pod uglom $\boldsymbol{\alpha}$ u odnosu na osu aviona, a samim tim pod istim uglom u odnosu na vektor brzine aviona, brzina $\boldsymbol{v_1}$ jeste projekcija vektora brzine aviona na pravac cijevi. Prema tome, brzinu aviona, $\boldsymbol{v_a}$, računamo kao:

$$v_a = \frac{v_1}{cos\alpha} = \frac{84{,}81\ \frac{m}{s}}{0{,}866} = 97{,}93\frac{m}{s}\ (\mathbf{4}\boldsymbol{b}).$$

Maksimalna brzinu koju zrak postiže u cijevi jeste brzina $\boldsymbol{v_2}$, koja je prema jednačini kontinuiteta 4x veća od $\boldsymbol{v_1}$, tj $\boldsymbol{v_2}$ = ***339,24*** **m/s**. Prema tome, možemo reći da je izračunata brzina aviona granična brzina pri kojoj će Venturijeva cijev još uvijek davati tačne rezultate. Za brzine veće od 98 m/s, Venturijeva cijev neće biti upotrebljiva **(1b)**.

Zadatak 5.

Izrazimo prvo rad preko veličina koje označavaju razmijenjenu količinu toplote tokom ovih procesa Q_{12}, Q_{23}, Q_{31}. Na osnovu prvog zakona termodinamike:

$\Delta Q = \Delta U + A$**(1 bod)**

U idealnom, zatvorenom ciklusu $\Delta U = 0$ tako da je $\Delta Q = A$, gdje ΔQ predstavlja algebarsku sumu veličina Q_{12}, Q_{23}, Q_{31}.

Na osnovu definicije za stepen korisnog dejstva, možemo napisati da je:

$\eta = \frac{Q_{12}+Q_{23}+Q_{31}}{Q_{12}}$**(1.5 bodova)**

U nazivniku se samo nalazi član Q_{12} jer se pri ovom izotermnom procesu zapremina povećava, za šta je potrebno dovoditi određenu količinu toplote mašini ($Q_{12} > 0$).

Pri adijabatskom procesu razmijenjena količina toplote sa okolinom je 0, tako da je $Q_{31} = 0$**(1bod).** Dakle:

$$\eta = \frac{Q_{12} + Q_{23}}{Q_{12}} = 1 + \frac{Q_{23}}{Q_{12}}$$

Imajući na umu da je pri izohornom procesu došlo do smanjenja pritiska, $\Delta p < 0$, zaključujemo da je došlo i do smanjenja temperature, $\Delta T < 0$, pa slijedi $\Delta U < 0$ i na kraju, kako je tokom izohornog procesa zapremina konstantna pa je rad idealnog gasa 0, slijedi da je $Q_{23} < 0$ (zbog toga se Q_{23} nije mogao naći u nazivniku u izrazu za η, jer se pri ovom procesu **odvodi** toplota). Možemo napisati da je

$$\eta = \frac{Q_{12} + Q_{23}}{Q_{12}} = 1 - \frac{Q_{23}}{Q_{12}} \qquad (1)$$

gdje je Q_{23}sada apsolutna vrijednost razmijenjene količine toplote tokom izohornog procesa.

Učeniku se za ovaj napisan izraz dodjeljuje **1 bod**; u slučaju da je učenik odmah napisao relaciju (4), dodjeljuju mu se **sviprethodni bodovi.**

Posmatrajmo prvo izotermni proces.

Prvi zakon termodinamike za izotermni proces: $Q_{12} = A$**(1 bod)**

Rad kod izotermnog procesa je

$$A = nRT \ln(\frac{V_f}{V_i})$$

gdje je u našem slučaju $T = T_{max}$, $V_f = V_2$, $V_i = V_1$. Dakle:

$A = Q_{12} = nRT_{max} \ln(\frac{V_2}{V_1})$ **(1 bod)**

Posmatrajmo sada izohorni proces.

Prvi zakon termodinamike za izohorni proces: $Q_{23} = \Delta U$ **(1bod)**

Slijedi:

$$Q_{23} = nC_v\Delta T = nC_v(T_{max} - T_{min}) = nC_vT_{max}(1 - \frac{1}{\tau})\textbf{(1 bod)}$$

Posmatrajmo sada adijabatski proces

Kod adijabatskog procesa, kao što smo već rekli, $\Delta Q = 0$. Jedna od relacija koja povezuje termodinamičke parametre pri adijabatskom procesu je:

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$$

gdje je γ tzv. adijabatska konstanta.

U našem slučaju:

$$T_{max}V_1^{\gamma-1} = T_{min}V_3^{\gamma-1} \quad \textbf{(1 bod)}$$

Iz čega slijedi:

$$\frac{T_{max}}{T_{min}} = \frac{V_3^{\gamma-1}}{V_1^{\gamma-1}} = \frac{V_2^{\gamma-1}}{V_1^{\gamma-1}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \textbf{(1.5 bodova)}$$

(proces je izohoran, pa je $V_3 = V_2$). Logaritmiranjem po bazi e, iz posljednje relacije imamo:

$$\ln\left(\frac{T_{max}}{T_{min}}\right) = ln\tau = (\gamma - 1)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \textbf{ (2 boda)}$$

Izraze za Q_{12}, Q_{23} ćemo sada uvrstiti u relaciju (1). Imamo:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{23}}{Q_{12}} = 1 - \frac{nC_vT_{max}\left(1 - \frac{1}{\tau}\right)}{nRT_{max}\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \textbf{ (1 bod)}$$

Nakon skraćivanja n i T_{max} ostaje nam:

$$\eta = 1 - \frac{C_v(1 - \frac{1}{\tau})}{R\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

Iz razmatranja adijabatskog procesa možemo izraziti član $\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$ kao$\frac{ln\tau}{(\gamma-1)}$.

Koristeći Mayer-ovu relaciju:

$$C_p - C_v = R \qquad \textbf{(1 bod)}$$

i definiciju adijabatske konstante:

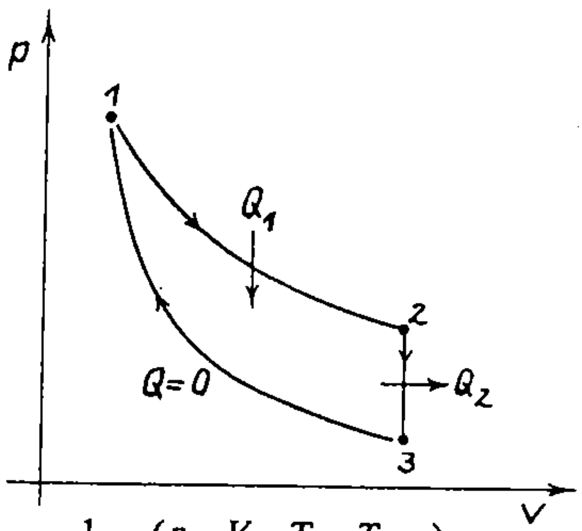
$$\gamma = \frac{C_p}{Cv} \qquad \textbf{(1 bod)}$$

možemo eliminisati C_p i time C_v izraziti preko γ i R. Iz posljednje relacije slijedi $C_p = \gamma C_v$, te uvrštavajući to u Mayer-ovu relaciju, dobijamo:

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1} \qquad \textbf{(2 boda)}$$

Iz svega ovoga slijedi da je:

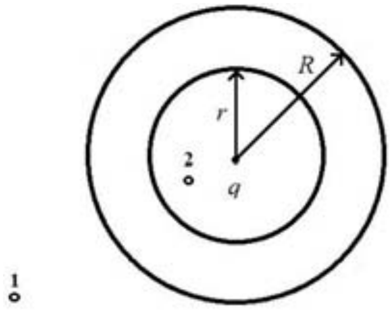
$$\eta = 1 - \frac{C_v\left(1-\frac{1}{\tau}\right)}{R\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = 1 - \frac{\left(\frac{R}{\gamma-1}\right)\left(1-\frac{1}{\tau}\right)}{\frac{R\, ln\tau}{(\gamma-1)}} = 1 - \frac{\tau-1}{ln\tau} \qquad \textbf{(2 boda)}$$



$1 - (p_1,\ V_1,\ T_1 = T_{max})$
$2 - (p_2,\ V_2,\ T_2 = T_1)$
$3 - (p_3,\ V_3 = V_2\ \ T_3 = T_{min})$

GRUPA B – ELEKTROMAGNETIZAM, OSCILACIJE I TALASI

1. Tačkasti naboj q=0,15 10^{-6} C nalazi se u centru sfernog provodnika sa vanjskim i unutrašnjim radijusima R=25 cm i r=20 cm. Naći jačinu polja u tačkama 1 i 2 koje se od naboja nalaze na udaljenostima r_1=50 cm i r_2=10 cm, a također i razliku potencijala tih tačaka. **(25 bodova)**

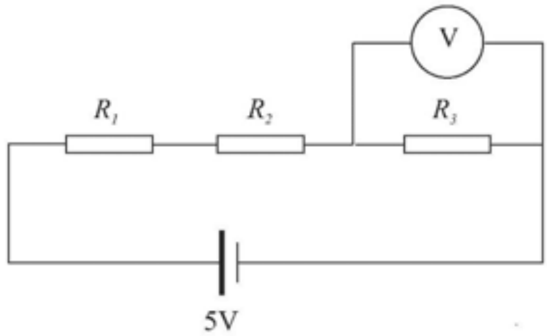


2. Električno kolo je spojeno kao na slici. Vrijednosti otpornika su $R_1 = 5\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 10\,\text{k}\Omega$ i $R_3 = 20\,\text{k}\Omega$. Napon na otporniku R_3 se mjeri pomoću voltmetra unutrašnjeg otpora $50\,\text{k}\Omega$.

a) Koliki je napon na otpornicima R_1 i R_3 kada voltmetar nije priključen?

b) Koliki je napon na otporniku R_3 kada je voltmetar priključen?

(20 bodova)



3. Mladi fizičar Mirso je dobio zadatak da izmjeri specifični naboj (tj. količnik naboja i mase) nove elementarne čestice dobivene u podzemnim laboratorijama PMF-a u Sarajevu. Čestice, koje u početnom trenutku imaju zanemarivu brzinu, Mirso ubrzava pomoću napona U=94 V.

a) Izraziti konačnu brzinu čestice preko napona U i specifičnog naboja.

b) Ako Mirso ima na raspolaganju utičnicu spojenu na gradsku mrežu (220 V), šta mora uraditi sa tim naponom (osim što ga treba smanjiti)?

c) Nacrtaj šemu i proračunaj elemente na toj šemi pomoću koje Mirso dobiva napon od 94 V od početnog napona od 220 V.

Čestica, nakon što je ubrzana, prolazi kroz stakleni balon ispunjen gasom žive pod niskim pritiskom. U tom području djeluje (približno) konstantno magnetno polje tzv. Helmholtzovih kalemova okomito na smjer kretanja čestica. Magnetno polje kalemova računati po formuli $B = 0.715\mu_0 \frac{nI}{R}$. Broj namotaja kalemova je n=154, a radijus kalemova je R=2 dm. Magnetna permeabilnost vakuuma je $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\,\frac{Tm}{A}$.

Putanju čestice možemo posmatrati kao slabu svjetlost nastalu pobuđivanjem žive pri kretanju te čestice.

d) Izvesti izraz za brzinu čestice u magnetnom polju preko specifičnog naboja, poluprečnika putanje r i polja B.

e) Pomoću rezultata pod a) i d), izvedi izraz za specifični naboj preko napona U, poluprečnika putanje r i polja B.

Međutim, fizičar Mirso se razbolio (ništa strašno) i zamolio je tebe da analiziraš njegova mjerenja.

f) Popuni tabelu:

Br. mjerenja	U [V]	I [A]	r [cm]	B [mT]	e/m [C/kg]
1.	94	0,92	5		
2.	94	1,13	4		
3.	94	1,55	3		

4.	94	2,44	2		

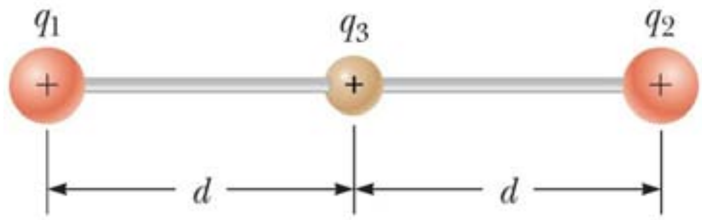
g) Nađi srednju vrijednost specifičnog naboja na osnovu rezultata mjerenja.

U nekom drugom eksperimentu Mirso je našao da je naboj te čestice negativan i jednak elementarnom naboju.

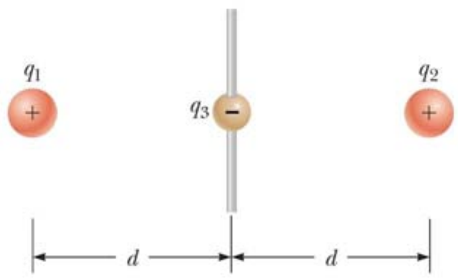
h) Proračunaj masu te čestice i pokušaj zaključiti da li je uopšte dobivena nova čestica.

(25 bodova)

4. a) Kuglice q_1i q_2 su fiksirane i međusobno spojene neprovodnim štapom dužine $2d$. Na sredini između kuglica q_1i q_2 nalazi se kuglica q_3 mase m koja može slobodno (bez trenja) da klizi po štapu. Sve tri kuglice imaju isto pozitivno naelektrisanje q. Naći period malih oscilacija kuglice q_3.



b) U ovom dijelu zadatka kuglice q_1i q_2 su i dalje fiksirane i imaju pozitivno naelektrisanje q. Međutim, štap je okomit na liniju koja spaja kuglice q_1i q_2, a kuglica q_3 ima negativno naelektrisanje $-q$ i može slobodno da klizi po štapu. Naći period malih oscilacija kuglice q_3.



Zanemariti gravitacionu silu. **(30 bodova)**

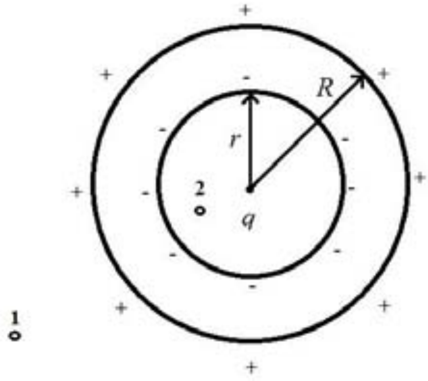
Napomena: U ovom zadatku vam mogu biti od koristi sljedeće aproksimacije: za malo x $(x \ll 1)$, realan broj n i $d \gg x$ vrijedi: $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$, $sinx \approx tgx \approx x$ i $d^2 \pm x^2 \approx d^2$

Pisati uredno i čitljivo. **SRETNO!**

RJEŠENJE

1. Tačkasti naboj q=0,15 10^{-6} C nalazi se u centru sfernog provodnika sa vanjskim i unutrašnjim radijusima R=25 cm i r=20 cm. Naći jačinu polja u tačkama 1 i 2 koje se od naboja nalaze na udaljenostima r_1=50 cm i r_2=10 cm, a također i razliku potencijala tih tačaka.

RJEŠENJE:



$R = 25$ cm

$r = 20$ cm

$r_1 = 50$ cm

$r_2 = 100$ cm

$E_1 = ?,\quad E_2 = ?,\quad \varphi_1 = ?,\quad \varphi_2 = ?,\quad U = ?$

(postavka 1 bod)

Jačina električnog polja E u tačkama 1 i 2 je:

$$E_1 = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{q}{r_1^2} = 5{,}4\cdot 10^3\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{q}{r_2^2} = 1{,}35\cdot 10^5\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

(5 bodova)

Na unutrašnjoj strani provodnika će se indukovati negativno naelektrisanje ($-q_{ind}$) čiji će intenzitet biti jednak nalektrisanju q. Cilindrični provodnik je u cjelini neutralan što će imati za posljedicu pojavu naboja q_{ind} na vanjskoj strani provodnika, što možemo zapisati kao:

$$q = |q_{ind}|$$ **(5 bodova)**

Potencijal je skalarna veličina koja će biti jednaka zbiru potencijala od pojedinačnih naelektrisanja $q, -q_{ind}$ i q_{ind}.

Za tačke 1 i 2 vrijedi:

$$\varphi = \varphi_q + \varphi_{qind} + \varphi_{-qind}$$ **(3 boda)**

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{q_{ind}}{r_1} - \frac{q_{ind}}{r_1}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_2} + \frac{q_{ind}}{R} - \frac{q_{ind}}{r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

(8 bodova)

Razlika potencijala je:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) = 9{,}44\cdot 10^3\ \text{V}$$ **(3 boda)**

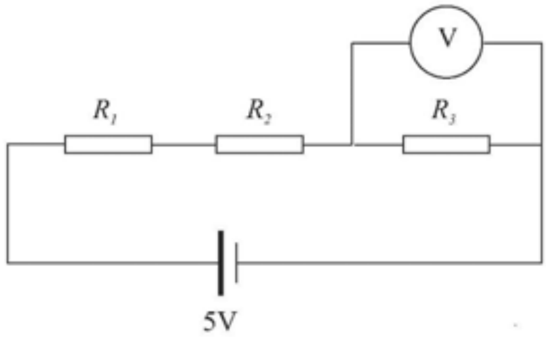
<u>Ukupno: 25 bodova</u>

2. Električno kolo je spojeno kao na slici. Vrijednosti otpornika su $R_1 = 5\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 10\ \text{k}\Omega$ i $R_3 = 20\ \text{k}\Omega$. Napon na otporniku R_3 se mjeri pomoću voltmetra unutrašnjeg otpora $50\ \text{k}\Omega$.

a) Koliki je napon na otpornicima R_1 i R_3 kada voltmetar nije priključen?

b) Koliki je napon na otporniku R_3 kada je voltmetar priključen?

RJEŠENJE:



$R_1 = 5\ \text{k}\Omega$

$R_2 = 10\ \text{k}\Omega$

$R_3 = 20\ \text{k}\Omega$

$U_B = 5\ \text{V}$

$R_V = 50\ \text{k}\Omega$

$U_1 = ?,\quad U_3 = ?,\quad U_3' = ?,$

(postavka 1 bod)

a) Voltmetar nije priključen. Iz Ohmovog zakona slijedi:

$$I = \frac{U_B}{R_1 + R_2 + R_3},$$

$$I = \frac{5\,V}{(5+10+20)\cdot 10^3\ \Omega} = 0{,}143\ \text{mA}.$$

(5 bodova)

Napon na otporniku R_1: $U_1 = I\,R_1 = 0{,}71\ \text{V}.$ **(2 boda)**

Napon na otporniku R_3: $U_3 = I\,R_3 = 2{,}86\ \text{V}.$ **(2 boda)**

b) Voltmetar je priključen na otpornik R_3. Ekvivalentni otpor paralelno vezanog otpornika R_3 i voltmetra unutrašnjeg otpora R_V je:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R_3} \quad \Rightarrow R' = \frac{R_3 R_V}{R_3 + R_V} = \frac{20\cdot 10^3\ \Omega \cdot 50\cdot 10^3\ \Omega}{20\cdot 10^3\ \Omega + 50\cdot 10^3\ \Omega} = 14{,}29\cdot 10^3\ \Omega.$$

Ekvivalentni otpor u cijelom kolu: $R_e = R_1 + R_2 + R' = 29{,}29\cdot 10^3\ \Omega.$ **(5 bodova)**

Iz Ohmovog zakona slijedi: $I = \dfrac{U_B}{R_e} = 0{,}171\cdot 10^{-3}\ \text{A}.$ **(2 boda)**

Napon na otporniku R_3 je: $U_V = R'\,I = 2{,}44\ \text{V}.$ **(3 boda)**

Ukupno: 20 bodova

3. Mladi fizičar Mirso je dobio zadatak da izmjeri specifični naboj (tj. količnik naboja i mase) nove elementarne čestice dobivene u podzemnim laboratorijama PMF-a u Sarajevu. Čestice, koje u početnom trenutku imaju zanemarivu brzinu, Mirso ubrzava pomoću napona U=94V.

d) Izraziti konačnu brzinu čestice preko napona U i specifičnog naboja.

e) Ako Mirso ima na raspolaganju utičnicu spojenu na gradsku mrežu (220 V), šta mora uraditi sa tim naponom (osim što ga treba smanjiti)?

f) Nacrtaj šemu i proračunaj elemente na toj šemi pomoću koje Mirso dobiva napon od 94 V od početnog napona od 220 V.

g) 94 V od 220 V.

Čestica, nakon što je ubrzana, prolazi kroz stakleni balon ispunjen gasom žive pod niskim pritiskom. U tom području djeluje (približno) konstantno magnetno polje tzv. Helmholtzovih kalemova okomito na smjer kretanja čestica. Magnetno polje kalemova računati po formuli $B = 0.715\mu_0 \frac{nI}{R}$. Broj namotaja kalemova je n=154, a radijus kalemova je R=2 dm. Magnetna permeabilnost vakuuma je $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7} \frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}}$.

Putanju čestice možemo posmatrati kao slabu svjetlost nastalu pobuđivanjem žive pri kretanju te čestice.

d) Izvesti izraz za brzinu čestice u magnetnom polju preko specifičnog naboja, poluprečnika putanje r i polja B.

e) Pomoću rezultata pod a) i d), izvedi izraz za specifični naboj preko napona U, poluprečnika putanje r i polja B.

Međutim, fizičar Mirso se razbolio (ništa strašno) i zamolio je tebe da analiziraš njegova mjerenja.

f) Popuni tabelu:

R.br.	U [V]	I [A]	r [cm]	B [mT]	e/m [C/kg]
1.	94	0,92	5		
2.	94	1,13	4		
3.	94	1,55	3		
4.	94	2,44	2		

g) Nađi srednju vrijednost specifičnog naboja na osnovu rezultata mjerenja.

U nekom drugom eksperimentu Mirso je našao da je naboj te čestice negativan i jednak elementarnom naboju.

h) Proračunaj masu te čestice i pokušaj zaključiti da li je uopšte dobivena nova čestica.

RJEŠENJE:

Postavka zadatka **(1 bod)**

a) Kinetička energija čestice jednaka je radu koji izvrši električna sila.

$$\frac{mv^2}{2} = eU$$

(1,5 bod)

Brzina čestice ubrzane naponom *U* je:

$$v = \sqrt{2U\frac{e}{m}}$$

gdje je $\frac{e}{m}$ specifični naboj čestice.

(1,5 bod)

b) Pretvoriti ga u istosmjerni napon!

(1,5 bod)

c) Jedan od načina bi bio koristiti djeljitelj napona (serijsku vezu dva otpornika odgovarajućih otpora). Napon na otporniku R_2 bi bio $U = 220\text{V}\frac{R_2}{R_1+R_2}$
Ukoliko želimo da on iznosi 94 V, trebamo proračunati vrijednosti otpora.
Iz prethodne relacije nalazimo da je veza otpora $R_1 = \frac{220-94}{94}R_2$.
Proizvoljno izaberemo otpor R_2, npr. $R_2 = 94\ \text{k}\Omega$.
Računamo otpor $R_1 = 126\ \text{k}\Omega$.

Drugi način bi bio koristiti transformator, te se od učenika traži da proračuna broj navoja na primaru i sekundaru, ali u tom slučaju treba naglasiti da se prvo spušta napon pa tek onda pretvara u istosmjerni.

(4,5 boda)

d) Lorencova sila ima ulogu centripetalne.

$$\frac{mv^2}{r} = evB$$

(2 boda)

Slijedi da je brzina $v = \frac{e}{m}Br$.

(1 bod)

e) Poredeći izraze za brzinu u dijelu pod a) i d), dobivamo:

$$\sqrt{2U\frac{e}{m}} = \frac{e}{m}Br.$$

Slijedi da je specifični naboj

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2r^2}$$

(3 boda)

d)

R.br.	U [V]	I [A]	R [cm]	B [mT]		e/m [C/kg]	
1.	94	0,92	5	0,636	**(0,5 boda)**	$1{,}859 \cdot 10^{11}$	**(1bod)**
2.	94	1,13	4	0,781	**(0,5 boda)**	$1{,}924 \cdot 10^{11}$	**(1bod)**
3.	94	1,55	3	1,072	**(0,5 boda)**	$1{,}818 \cdot 10^{11}$	**(1bod)**
4.	94	2,44	2	1,687	**(0,5 boda)**	$1{,}65 \cdot 10^{11}$	**(1bod)**

e) Srednja vrijednost je:

$$\left(\frac{e}{m}\right)_{sr} = 1{,}813 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}.$$

(1 bod)

f) Masa je:

$$m = \frac{e}{\frac{e}{m}} = 8.82 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}.$$

(1 bod)

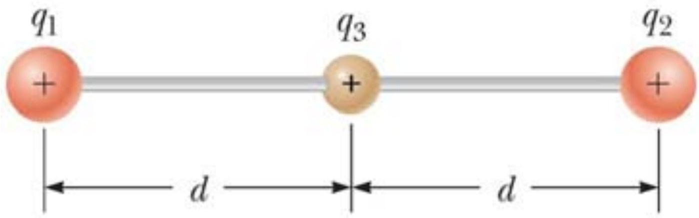
Isti red veličine kao masa elektrona.

Novim mjerenjem su ispravljene neke sistemske i slučajne greške te je dobiveno 9,1 10^{-31} kg. Dakle ipak je u pitanju bio elektron. (UČENIKU PRIZNATI SVAKI ODGOVOR)

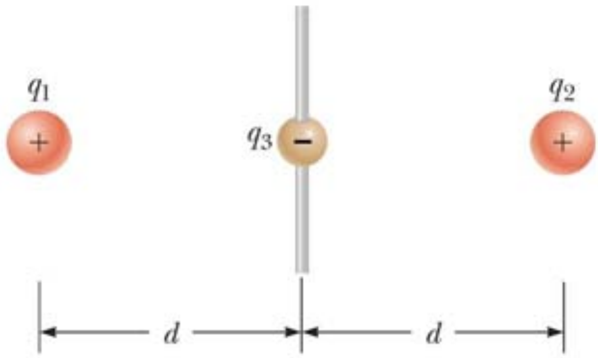
(1 bod)

<u>**Ukupno: 25 bodova**</u>

4. a) Kuglice q_1i q_2 su fiksirane i međusobno spojene neprovodnim štapom dužine $2d$. Na sredini između kuglica q_1i q_2 nalazi se kuglica q_3 mase m koja može slobodno (bez trenja) da klizi po štapu. Sve tri kuglice imaju isto pozitivno naelektrisanje q. Naći period malih oscilacija kuglice q_3.



c) U ovom dijelu zadatka kuglice q_1i q_2 su i dalje fiksirane i imaju pozitivno naelektrisanje q. Međutim, štap je okomit na liniju koja spaja kuglice q_1i q_2, a kuglica q_3 ima negativno naelektrisanje $-q$ i može slobodno da klizi po štapu. Naći period malih oscilacija kuglice q_3.

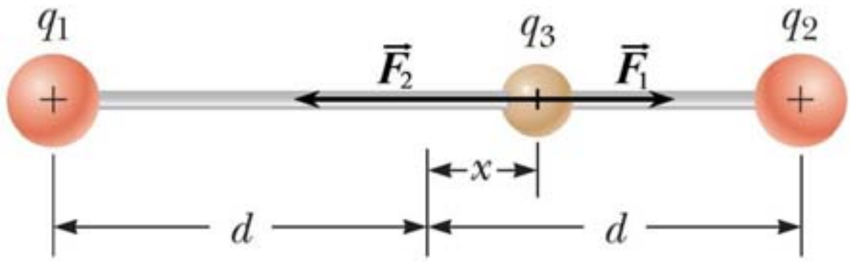


Zanemariti gravitacionu silu.

Napomena: U ovom zadatku vam mogu biti od koristi sljedeće aproksimacije: za malo x $(x \ll 1)$, realan broj n i $d \gg x$ vrijedi: $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$, $sinx \approx tgx \approx x$ i $d^2 \pm x^2 \approx d^2$

RJEŠENJE:

a)



Označimo sa x udaljenost naelektrisanja q_3 od ravnotežnog položaja. Sila kojom naelektrisanje q_1 djeluje na naelektrisanje q_3 je:

$$F_1 = \frac{k \cdot q^2}{(d+x)^2}.$$

(1 bod)

Sila kojom naelektrisanje q_2 djeluje na naelektrisanje q_3 je:

$$F_2 = \frac{k \cdot q^2}{(d-x)^2}.$$

(1 bod)

Rezultantna sila je:

$$F_R = F_1 - F_2 = k \cdot q^2 \cdot \left(\frac{1}{(d+x)^2} - \frac{1}{(d-x)^2}\right) = k \cdot q^2 \cdot \left(\frac{(d-x)^2 - (d+x)^2}{(d+x)^2 \cdot (d-x)^2}\right),$$
$$= k \cdot q^2 \cdot \frac{-4dx}{(d^2 - x^2)^2} = \frac{-4kq^2 dx}{(d^2 - x^2)^2}$$

(4 boda)

Pošto je $x \ll d$ koristimo aproksimaciju $d^2 \pm x^2 \approx d^2$ pa je:

$$F_R \approx \frac{-4kq^2 dx}{d^4} = -\frac{4kq^2}{d^3} x.$$

(4 boda)

Možemo primijetiti analogiju između ove sile i elastične sile opruge $F = -kx$. Ovdje ulogu krutosti opruge k ima $\frac{4kq^2}{d^3}$. Period oscilovanja elastične opruge je:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

pa je period oscilovanja naelektrisanja q_3:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{4kq^2}{d^3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{md^3}{4kq^2}}.$$

(5 bodova)

Napomena: do izraza za F_R smo mogli doći koristeći aproksimaciju $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$

$$F_1 = \frac{k \cdot q^2}{(d+x)^2} = \frac{k \cdot q^2}{d^2 \cdot \left(1 + \frac{x}{d}\right)^2} = \frac{k \cdot q^2}{d^2} \cdot \left(1 + \frac{x}{d}\right)^{-2} \approx \frac{k \cdot q^2}{d^2} \cdot \left(1 - 2\frac{x}{d}\right).$$

(5 bodova)

Slično dobijamo

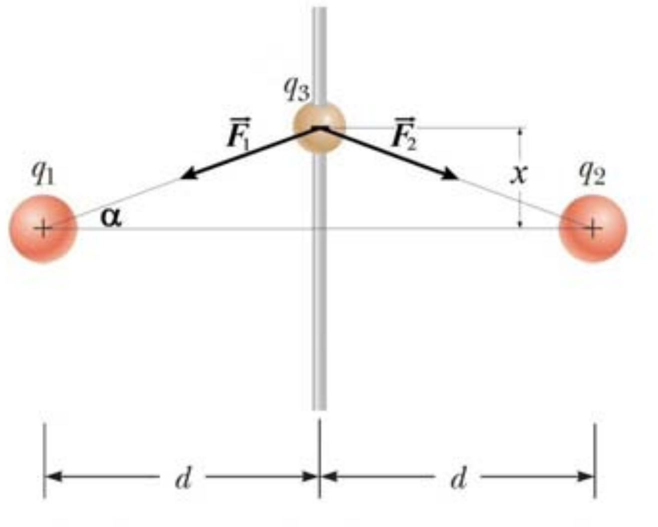
$$F_2 \approx \frac{k \cdot q^2}{d^2} \cdot \left(1 + 2\frac{x}{d}\right),$$

(2 boda)

$$F_R = F_1 - F_2 \approx \frac{k \cdot q^2}{d^2} \cdot \left[\left(1 - 2\frac{x}{d}\right) - \left(1 + 2\frac{x}{d}\right)\right] = -\frac{4kq^2}{d^3}x.$$

(1 bod)

b)



$$F_1 = F_2 = \frac{k \cdot q^2}{r^2} = \frac{k \cdot q^2}{d^2 + x^2} \approx \frac{k \cdot q^2}{d^2}$$

(4 boda)

Komponenta sila F_1 i F_2 koja „vraća" naelektrisanje q_3 u ravnotežni položaj je:

$$F' = F_1 sin\alpha \approx F_1 tg\alpha = F_1 \cdot \frac{x}{d} \approx \frac{k \cdot q^2}{d^2} \cdot \frac{x}{d} = \frac{kq^2 x}{d^3},$$

(5 bodova)

$$F_R = 2F' = 2 \cdot \frac{kq^2 x}{d^3} = \frac{2kq^2}{d^3}x.$$

(1 bod)

Slično kao pod a) zaključujemo:

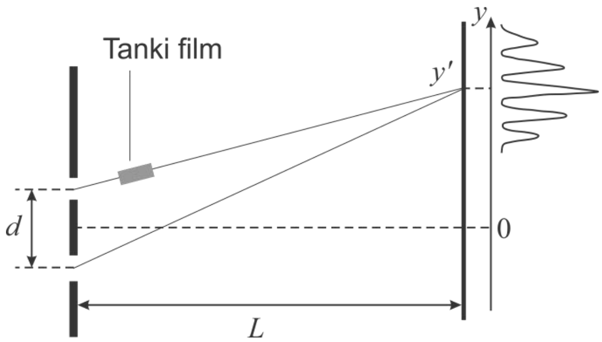
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{2kq^2}{d^3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{md^3}{2kq^2}}.$$

(5 bodova)

Ukupno: 30 bodova

GRUPA C – OPTIKA, ATOMSKA I NUKLEARNA FIZIKA

1. Helium-neonski laser emituje lasersku svjetlost valne dužine $\lambda = 632{,}4\, nm$ koja pada okomito na prepreku sa dvije pukotine čija je međusobna udaljenost $d = 0{,}1$ mm . Iza pukotina na udaljenosti $L = 1$ m nalazi se ekran (zaklon) na kojem se posmatraju interferentne pruge.
   a) Odredite na kojoj udaljenosti od centralne svijetle pruge se nalaze prvi i drugi interferentni maksimumi. **(7b)**
   b) Ova eksperimentalna postavka sa dvije pukotine može se koristi za određivanje indeksa prelamanja (loma) optičkh tankih filmova. Tanki film postavi se okomito na pravac postiranja jedne zrake tako da se između zraka javi dodatna fazna razlika u odnosu na prethodni slučaj. Zbog ove činjenice svijetla centralna pruga se pomjeri za udaljenost $y' = 5,45$ cm u pozitivnom smjeru $y-$ose. Odredite indeks prelamanja datog optičkog tankog filma ako je debljina filma jednaka $a = 20\ \mu m$. **(8b)**

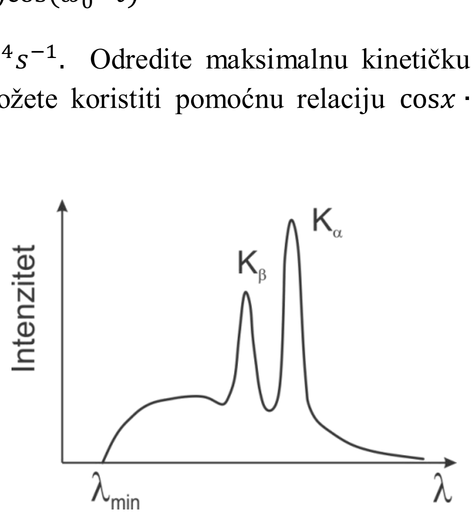


2. Fotoelektrični efekat je pojava da metali emituju elektrone kada se osvijetle elektromagnetnim zračenjem određene valne dužine. Eksperimentu pokazuju da se emisija elektrona dešava trenutačno, bez kašnjenja u odnosu na trenutak kada se metal osvijetli. Danas znamo da se emisija elektrona iz atoma dešava na vremenskoj skali od jedne atosekunde[1] (1 as $= 10^{-18}$ s). U ovom zadatku razmatramo emisiju elektrona sa površine litija pod uticajem snopa elektromagnetnog zračenja valne dužine $\lambda = 200$ nm i snage $P = 5$ mW[2]. Površina snopa iznosi 1 mm^2, a izlazni rad elektrona iz litija je jednak $A_i = 2{,}39$ eV.
   a) Pretpostavimo da se elektron pri apsorpciji elektromagnetnog zračenja ponaša kao apsolutno crno tijelo, odredite koliko je potrebno vremena nakon početka apsorpcije da počne emisija elektrona sa površine litija. Smatrati da je elektron u obliku sfere poluprečnika $r_e \approx 3 \cdot 10^{-13}$cm . **(8b)**
   b) Pretpostavimo da se sada na litij djeluje promjenljivim električnim polje oblika

$$E = a(1 + \cos(\omega \cdot t))\cos(\omega_0 \cdot t)$$

   gdje je a konstanta, $\omega = 4 \cdot 10^{14} s^{-1}$, te $\omega_0 = 36 \cdot 10^{14} s^{-1}$. Odredite maksimalnu kinetičku energiju elektrona koji se emituje se površine litija. Možete koristiti pomoćnu relaciju $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)$. **(12b)**

3. X-zračenje nastaje u tzv. katodnim (rendgenskim) cijevima. Tipična katodna cijev sastoji se od katode i anode. Kroz katodu se propušta električna struja koja uzorkuje emisiju elektrona u procesu termoelektronske emisije. Elektroni koji se emituju sa površine katode ubrzavaju se razlikom potencijala između katode i anode. Ovako ubrzani elektroni se zatim naglo usporavaju pri sudaru sa atomima unutar anode i na taj način nastaje tzv. *zakočno zračenje*, odnosno



[1]M. Schultze et al, *Delay in photoemision*, Science **328**, 1658-1662 (2010).
[2] Ovaj intenzitet elektromagnetnog zračenja odgovara redu veličine intenziteta standardnog He-Ne lasera ili običnog laserskog pokazivača.

neprekidni dio spektra zračenja u intervalu $[\lambda_{min}, \infty)$. Unutar tog spektra koji je prikazan na priloženoj slici pojavljuju se oštri maksimumi koji predstavljaju tzv. *karakteristično zračenje* koje zavisi od materijala od kojeg je anoda napravljena. Prema Moseleyevom zakonu, valna dužina karakterističnog zračenja iz K_α serije linija može se računati preko formule

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = R_H (Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)$$

gdje su R_H Rydbergova konstanta, a Z atomski broj elementa od kojeg je napravljena anoda.

a) Izračunati napon na rendgenskoj cijevi čija je anoda od nikla (atomski broj 28) ako razlika valnih dužina K_α linije i kratkovalne granice neprekidnog rendgenskog spektra iznosi 65 pm. **(10b)**
b) Da li elektroni ubrzani u ovoj katodnoj cijevi imaju dovoljnu energiju da izbiju elektron iz prve ljuske u atomu nikla? **(6b)**
c) Odrediti kojem elementu odgovara K_α linija valne dužine 57,28 pm. **(4b)**

4. U ovom zadatku razmatramo neke od karakteristika jezgre. Zadaci nisu povezani i mogu se raditi nezavisno jedan od drugog.
   a) Pretpostavljajući da jezgro ima oblik sfere čiji se poluprečnik može izračunati po formuli $r = r_0 \sqrt[3]{A}$, gdje je $r_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-15}$m, A je maseni broj, naći srednju gustinu jezgre. **(3b)**
   b) Prema jednom od modela jezgre poznatog pod nazivom *model kapljice*, energija veze jezgre sa atomskim brojem Z i masenim brojem A može se računati pomoću poluemipirijske formule

$$E_V = C_1 A - C_2 A^{\frac{2}{3}} - C_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} - C_4 \frac{(A-2Z)^2}{A} + C_5\, A^{-\frac{1}{2}}$$

   gdje su $C_1 = 15{,}7$ MeV, $C_2 = 17{,}8$ MeV, $C_3 = 0{,}71$ MeV, $C_4 = 23{,}6$ MeV i $C_5 = 11{,}2$ MeV konstante. Na osnove ove formule odredite masu najstabilnije jezgre ${}^{56}_{26}$Fe. **(6b)**
   c) U uranovoj rudi odnos masa ${}_{92}U^{238}$ i ${}_{82}Pb^{206}$iznosi 3, 2 . Smatrajući da je sve olovo nastalo kao produkt raspada urana, naći starost te rude. Period poluraspada ${}_{92}U^{238}$ je $4{,}5 \cdot 10^6$ godina. **(6b)**
   d) Mjerenjem aktivnosti preparata ^{24}Na , u zavisnosti od vremena, dobijeni su slijedeći rezultati:

t (h)	0	2,5	5	7,5	10	15	20	25	30
A ($\cdot 10^{14}$Bq)	3,2	2,8	2,5	2,3	2	1,6	1,3	1	0,8

Na osnovu ovih podataka nacrtati odgovarajući grafik i grafički odreditii konstantu raspada ovog izotopa. Grafik nacrtati na milimetarskom papiru. **OBAVEZNO NAPISATI ŠIFRU NA MILIMETARSKOM PAPIRU. (10b)**

Slobodno se poslužite!

Masa elektrona	$9{,}1 \cdot 10^{-31}$kg	Avogadrov broj	$6{,}022 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Elementarni naboj	$1{,}6 \cdot 10^{-19}$C	Unificirana atomska jedinica mase	$1{,}660539 \cdot 10^{-27}$kg
Planckova konstanta	$6{,}626 \cdot 10^{-34}$Js	Masa neutrona	$1{,}674927 \cdot 10^{-27}$kg
Brzina svjetlosti	$3 \cdot 10^8$ ms^{-1}	Boltzmannova konstanta	$1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$
Rydbergova konstanta	$1{,}097 \cdot 10^7$m^{-1}	Masa protona	$1{,}6726219 \cdot 10^{-27}$ kg

RJEŠENJA

Zadatak 1.

a) Poznato je da u Youngovom eksperimentu sa dvije pukotine, položaj interferentih maksimuma (svijetlih pruga) na ekranu u odnosu na centralni maksimum određen formulom

$$y_m = \frac{\lambda L}{d} m$$

(4 b)

gdje m određuje red interferentnog maksimuma. Tražimo položaje prvog ($m = 1$) i drugog ($m = 2$) interferentnog maksimuma:

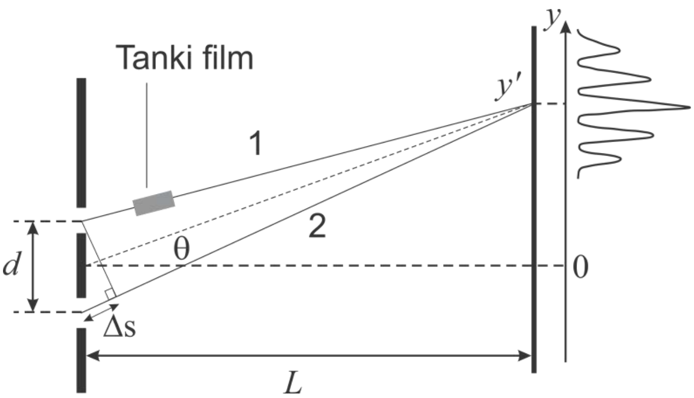
$$y_1 = \frac{632{,}4\ \text{nm} \cdot 1\text{m}}{0{,}1\ \text{mm}} = 6{,}324\ \text{mm}$$

(1b)

$$y_2 = 2y_1 = 12{,}648\ \text{mm}$$

(1b)

b) Kada se na put prostiranja jedne svjetlosne zrake postavi tanki optički film, dolazi do promjene u fazi, odnosne do pojave dodatne fazne razlike između zraka 1 i 2. Ova promjena u fazi jedne zrake uzrokuje da se interferentna slika na ekranu pomjeri u odnosu na prethodni slučaj. Akumulirana fazna razlika svjetlosnog zraka 1 u odnosu na prethodni slučaj je jednaka



$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} na - \frac{2\pi}{\lambda} a.$$

(3b)

Svjetlosni zrak 2 prelazi duži geometrijski put Δs u odnosu na zrak 1. Akumulirana faza usljed ovog geometrijskog puta je $\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s$.

(2b)

S obzirom da za centralni maksimum vrijedi da fazna razlika između ova dva zraka mora biti jednaka nuli, $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = 0$ dobijamo

(1b)

$$\Delta s = a(n - 1)$$

(1b)

S druge strane znamo da u Youngovom eksperimentu vrijedi

$$\sin\theta = \frac{\Delta s}{d} \approx \tan\theta = \frac{y'}{L}$$

(1b)

tako da nalazimo da indeks prelamanja filma jednak

$$n = 1 + \frac{y'd}{aL} = 1 + \frac{5{,}45\ \text{cm} \cdot 0{,}1\ \text{mm}}{20\mu\text{m} \cdot 1\text{m}} = 1{,}2725$$

Zadatak 2.

a) Odredimo prvo intenzitet elektromagnetng zračenja:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{5\ \text{mW}}{1\text{mm}^2} = 5 \cdot 10^3\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

(2b)

Efektivna površina koja apsorbuje zračenje je površina kruga, $S_e = \pi r_e^2 = 28{,}26 \cdot 10^{-30}\text{m}^2$. **(3b)**

(Ako se za površinu elektrona uzme površina sfere, $S_e' = 4\pi r_e^2 = 113{,}04 \cdot 10^{-30}\text{m}^2$ onda se boduje sa **(1b))**

Energija koju elektron u jedinici vremena po jedinici efektivne površine apsorbuje je jednaka, $E = IS_e t$ pa je vrijeme koje je potrebno da elektron aposrbuje energiju koja jednaka barem izlaznom radu određeno sa

$$t = \frac{A_i}{S_e I} = \frac{2{,}39 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{J}}{28{,}26 \cdot 10^{-30}\ \text{m}^2 \cdot\ 5 \cdot 10^3\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}} = 1691436{,}66\ s = 19{,}58\ \text{dana}$$

(3b)

b) Korištenjem formule $cosx \cdot cosy = \frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)$, dobijamo

$$E = a(1 + \cos(\omega \cdot t))\cos(\omega_0 \cdot t) = a\cos(\omega_0 \cdot t) + a\cos(\omega \cdot t)\cos(\omega_0 \cdot t) =$$

$$= a \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \frac{1}{2}a \cdot \cos((\omega_0 + \omega) \cdot t) + \frac{1}{2}a \cdot \cos\big((\omega_0 - \omega) \cdot t\big)$$

(3b)

Iz ovoga zaključujemo da su u ovom zračenju zastupljeni fotoni frekvencija:

$$\nu_1 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5{,}73 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

(1b)

$$\nu_2 = \frac{\omega_0 + \omega}{2\pi} = 6{,}37 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

(1b)

$$\nu_3 = \frac{\omega_0 - \omega}{2\pi} = 5{,}09 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

(1b)

Granična frekvencija koja može izazvati fotoefekat kod litija je

$$\nu_{granično} = \frac{A_i}{h} = \frac{2{,}39 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\,J}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,Js} = 5{,}77 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

(2b)

Vidimo da će fotoefekat izazvati samo elektroni frekvencije $\nu_2 = 6{,}37 \cdot 10^{14}$ Hz.

(1b)

Tada će maksimalna kinetička energija fotoelektrona biti:

$$E_{kmax} = h\nu_2 - A_i$$

(1b)

$$\mathrm{E_{kmax}} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js} \cdot 6{,}37 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz} - 2{,}39 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} =$$

$$= 3{,}9931 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{J} = 0{,}25\ \mathrm{eV}$$

(2b)

Zadatak 3.

a) Prema Moseleyevom zakonu, talasnu dužinu karakterističnog rendgenskog zračenja možemo dobiti prema formuli:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z-1)^2(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2})$$

(3b)

K_α linija nastaje kao prelaz sa drugog ($n = 2$) na prvo ($m = 1$) energetsko stanje.

(1b)

Za neprekidni spektar rendgenskog zračenja vrijedi:

$$\frac{hc}{\lambda_{min}} = eU$$

(3b)

Talasna dužina K_α linije nikla ($Z = 28$) je:

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{1}{R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)}$$

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{1}{1{,}1 \cdot 10^7 m^{-1} \cdot (28-1)^2 \cdot (\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2})} = 1{,}6627 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} = 166{,}27\ \mathrm{pm}$$

(1b)

Iz teksta zadatka imamo

$$\lambda_{K_\alpha} - \lambda_{min} = 65\ \mathrm{pm}$$

pa je

$$\lambda_{min} = \lambda_{K_\alpha} - 65\ pm = 101{,}27\ \mathrm{pm}$$

(1b)

Napon na cijevi je:

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{hc}}{\mathrm{e}\lambda_{\mathrm{min}}} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js} \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 101.27 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}} = 12275{,}35\ \mathrm{V} = 12{,}28\ \mathrm{kV}$$

(1b)

b) Energija elektrona koji su ubrzani ovim naponom je

$$E = eU = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot 12275{,}35\ \mathrm{V} = 1{,}964 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{J}$$

(2b)

Da bi se elektron odvojio od atoma nikla, potrebno je da pređe iz osnovnog stanja ($m = 1$) u slobodno stanje ($n = \infty$), pa je energija potrebna za to:

$$E_{potrebno} = \frac{hc}{\lambda} = hcR(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2}\right) = 1{,}595 \cdot 10^{-15}\, J$$

(3b)

Pošto je $E > E_{potrebno}$, zaključujemo da elektroni ubrzani u ovoj cijevi imaju dovoljnu energiju da izbiju elektron iz prve ljuske u atomu nikla.

(1b)

c) Iz Moseleyevog zakona, možemo da pokažemo da vrijedi:

$$Z = \sqrt{\frac{1}{\lambda R(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2})}} + 1$$

(2b)

pa za talasnu dužinu K_α linije koja iznosi 57,28 pm, dobijamo da je odgovarajući atomski broj:

$$Z = \sqrt{\frac{1}{57{,}28 \cdot 10^{-12}\ m \cdot 1.1 \cdot 10^7 m^{-1} \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)}} + 1 = 47$$

(2b)

i zaključujemo da se radi o srebru (Ag).

Zadatak 4

a) Poluprečnik jezgra masenog broja A računa se po formuli:

$$r = r_0 \cdot \sqrt[3]{A}$$

pri čemu je $r_0 = 1.4 \cdot 10^{-14}$ m, dok se masa tog jezgra određuje po formuli:

$$m = A \cdot u$$

$(u = 1.66 \cdot 10^{-27}\ kg)$.

(1b)

Gustoća jezgra je

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Au}{\frac{4}{3}{r_0}^3 A\pi}$$

$$\rho = \frac{3u}{4{r_0}^3\pi} = 1,4 \cdot 10^{17}\,\frac{kg}{m^3}$$

(2b)

b) Energija veze po definiciji je jednaka

$$E_V = \left[Zm_p + Nm_n - M\right]c^2$$

(2b)

gdje je M masa jezgre.

Iz date poluempirijske formule može se izračunati energija veze za ${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}$:

$$E_V = 492{,}785\ \mathrm{MeV}$$

(2b)

Prema tome, masa jezgre je

$$M = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{E_v}{c^2} = (93{,}7359 \cdot 10^{-27} - 0{,}87606 \cdot 10^{-27})\mathrm{kg} = 92{,}85984 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$

(2b)

c) Broj jezgara olova jednak je broju raspadnutih jezgara urana:

$$N_1 = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

a broj jezgara urana iznosi

$$N_2 = N_0 e^{-\lambda t}$$

(3b)

Dijeljenjem dvije prethodne relacije, te uvrštavanjem uslova zadatka da je odnos masa urana i olova u uranovoj rudi 3,2 slijedi:

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{-\lambda t} - 1$$

$$\frac{m_1}{M_1} \cdot N_A \cdot \frac{M_2}{m_2 \cdot N_A} = e^{-\lambda t} - 1$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1}{M_2} \cdot (e^{-\lambda t} - 1)$$

$$t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 + \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{M_2}{M_1})$$

$$t = \frac{T}{ln2} \cdot \ln(1 + \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{M_2}{M_1})$$

$$t = 2{,}2 \cdot 10^9 \text{godina}$$

(3b)

c) Aktivnost se tokom vremena mijenja po zakonu

$$A = A_0 e^{-\lambda t}$$

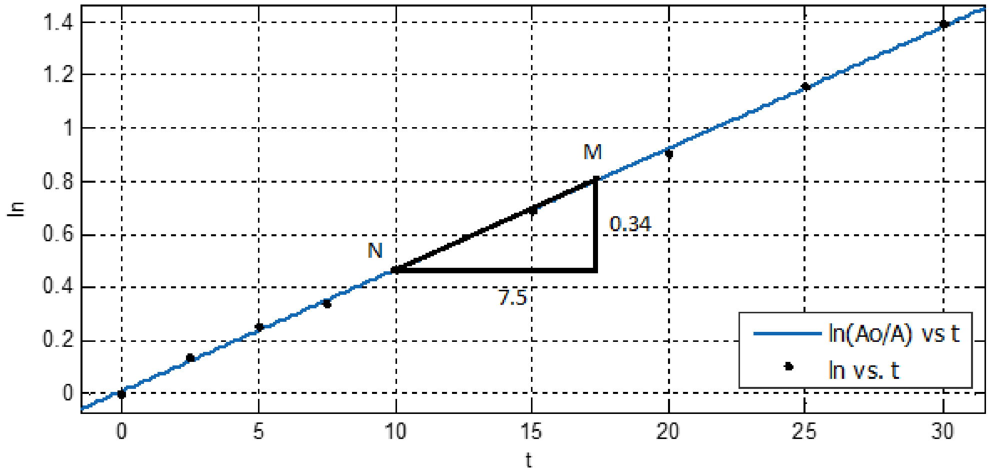
odakle slijedi:

$$lnA = lnA_0 - \lambda t$$
$$lnA_0 - lnA = \lambda t$$
$$ln\frac{A_0}{A} = \lambda t$$

(3b)

Dakle, veličina $ln\frac{A_0}{A}$ je linearna funkcija vremena (dobili smo zavisnost oblika $y = kx$),

što je grafički prikazano na donjoj slici



(5b)

Na grafiku se boduju sve tačke pravilno označene (nacrtane) (1b). Grafik „razvučen“ preko cijelog milimetarskog papira (1b). Prava povučena tako da je odstupanje približno ravnomjerno od svih tačaka (1b). Odabir dviju tačaka sa prave za dobijane koeficijenta pravca(1b). Jasno označeno kako se određuje pravac prave (1b).

Konstanta raspada je koeficijent pravca te prave, odnosno za dvije proizvoljne tačke M i N sa tog pravca vrijedi:

$$\lambda = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}$$

$$\lambda = \frac{0{,}34}{7{,}5\ h}$$

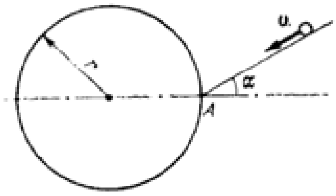
$$\lambda = 1{,}26 \cdot 10^{-5} s^{-1}$$

(2b)

GRUPA D – CJELOKUPNA FIZIKA

Problem 1 – Nestašna loptica (5.5b)

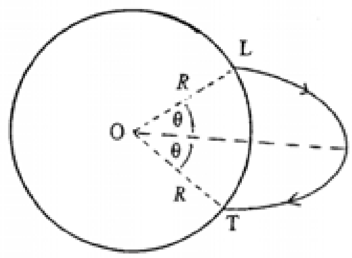
Loptica se kreće konstantnom brzinom v po horizontalnoj podlozi i u tački A upada u vertikalni cilindar visine H i poluprečnika baze r. Vektor brzine loptice zaklapa ugao α sa linijom povučenom kroz osu simetrije cilindra i tačku A (**Slika 1** - pogled odozgo). Pri kojim uslovima će loptica "izaći" iz cilindra nakon elastičnih sudara sa zidovima cilindra (napisati vezu između v, H, r i α). Trenje se zanemaruje.



Slika 1

Problem 2 – Čudna gravitacija (5.5b)

Prema drugom Keplerovom zakonu kod tijela koja se kreću po eliptičnim putanjama oko nekog drugog, masivnijeg tijela (kao na **Slici 2**) vektor pložaja opisuje površinu koja je proporcionalna vremenu putovanja tijela iz jedne tačke orbite u drugu.



Slika 2

Svemirska kapsula je lansirana sa planete sfernog oblika, radijusa R, koja nema atmosferu, iz tačke L tako da se vraća nazad na planetu u tačku T. Ugaono rastojanje između tačke lansiranja L i tačke slijetanja T, u odnosu na centar planete O, izosi 2θ. Duž $\overline{TL}$ predstavlja malu osu eliptične putanje. Maksimalna udaljenost svemirske kapsule u odnosu na površinu planete iznosi R. Na osnovu ovog podatka i osobina elipse, može se zaključiti da velika poluosa eliptične putanje kapsule upravo jednaka R.

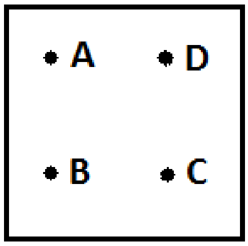
a) **(3b)** Koliko traje let kapsule ako se zna da je vrijeme kretanja po "cijeloj" eliptičnoj putanji (u slučaju kad bi tijelo moglo proći kroz planetu i napraviti puni obrtaj) jednako T_0?

b) **(2.5b)** Koliko je vremena potrebno da se kapsula lansirana vertikalno uvis do maksimalne visine $h = R$ vrati na planetu?

Površina elipse čija je dužina velike poluose a, a male poluose b iznosi πab. Može vam koristiti relacija: $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$.

Problem 3 – Crna kutija (5b)

Na raspolaganju vam je crna kutija, koja ima 4 vanjska terminala. Nazovimo ih A, B, C i D (**Slika 3**). Ono što je poznato u vezi crne kutije jeste da se u njoj nalazi jedan ili više otpornika, te jedna ili više idealnih dioda. (To su ujedno i jedini elementi unutar kutije, ***nemamo*** izvora napona ili struje.)



Slika 3

Na raspolaganju vam je samo ohmetar koji ima dva priključka pomoću kojih mjeri otpor između dvije tačke. U **Tabeli** su rezultati mjerenja koje ste obavili (vrijednosti otpora su u $k\Omega$):

Mjerenja	+ / −	− / +
A – C	11.0	∞
D – B	∞	5.5
B – A	∞	∞
B – C	8.5	∞

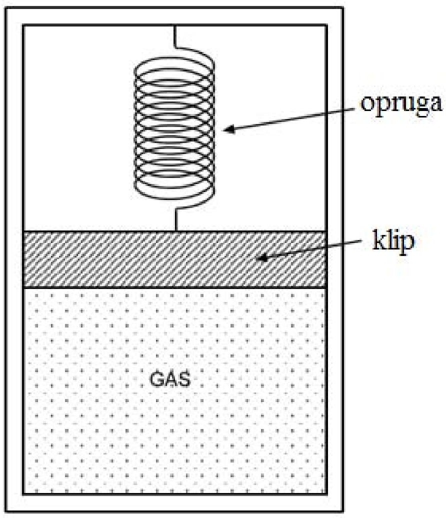
Oznake (+ / −) i (− / +) znače da smo mijenjali polaritet priključaka ohmetra. Npr. u prvom slučaju prva kolona znači da smo terminal A spojili na pozitivni priključak ohmetra, a C na negativni, dok druga kolona znači da smo A priključili na negativni, a C na pozitivni.

Pomoću podataka odredite shemu otpornika i dioda unutar crne kutije, kao i vrijednost svih otpornika.

Idealna dioda je element koji se označava sa  *i ukoliko je smjer struje kroz diodu u smjeru strelice na oznaci tada dioda* *provodi struju bez ikakvog otpora. Međutim, ako je smjer struje kroz diodu suprotan strelici na oznaci, tada dioda imabeskonačan otpor i ponaša se kao prekid kola.*

Problem 4 – TD oscilacije (6b)

Dva mola idealnog gasa helija, na temperaturi $T_0 = 300\ K$, nalaze se unutar vertikalno postavljene cilindrične posude (**Slika 4**). Pokretni klip mase $m = 10\ kg$ i poprečnog presjeka $A = 500\ cm^2$ može da se kreće bez trenja. Unutar gornjeg, praznog dijela posude, nalazi se vertikalno postavljena opruga. Jedan kraj opruge zakačen je za pokretni klip dok je drugi kraj zakačen za gornji zid posude. Curenje gasa kroz kontaktnu površinu između klipa i posude, kao i specifični toplotni kapacitet posude, klipa i opruge možete zanemariti. Masa opruge je zanemariva, a njen koeficijent elastičnosti možemo zapisati kao $k = \frac{mgA}{V_0}$.



Slika 4

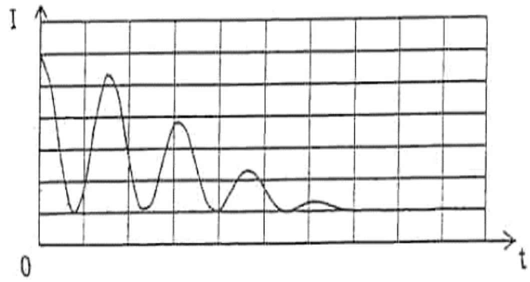
Izračunajte frekvenciju malih oscilacija klipa kada se klip pomjeri za neku malu udaljenost iz ravnotežnog položaja.

Gravitaciono ubrzanje iznosi $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$. *Svi procesi u ovom zadatku se mogu smatrati adijabatskim*. Gasna konstanta iznosi

$R = 8.314\ \frac{J}{K\cdot mol}$. Za jednoatomni gas (helij) adijabatski eksponent iznosi $\gamma = 5/3$.

Problem 5 – Sunčevi signali (5b)

Radio teleskop koji ima dvije antene udaljene $50\ m$ jedna od druge, postavljen je na ekvator duž pravca istok-zapad, kako bi snimao radio signale sa Sunca. *21. marta* u podne, kada se Sunce nalazilo tačno iznad teleskopa, snimljen je radio signal talasne dužine $0{,}75\ m$. Signali zabilježeni na antenama, prenose se kablovima iste dužine, sabiraju se, nakon čega se pojačavaju. Na **Slici 5** je prikazan rezultujući intenzitet I u funkciji vremena t, pri čemu se vrijeme mjeri nakon podne.



Slika 5

a) **(3.5b)** Odrediti koliko vremena je prošlo do pojave prvog maksimuma (Maksimum u $t = 0$ smatramo žcentralnim.)
b) **(1.5b)** Kakva bi bila promjena snimka (prikazanog grafika) ako se mjerenja izvedu u Mostaru, na geografskoj širini od $43.43°N$.

Problem 6 – Pražnjenje Zemlje (6b)

Sa stanovišta elektrostatike površinu Zemlje možemo dobro aproksimirati provodnikom. Neka je pri određenim vremenskim uslovima jačina električnog polja koje je usmjereno prema površini Zemlje jednaka $150\ \frac{V}{m}$ i neka je koncentracija pozitivnih i negativnih jona u atmosferi u blizini površine Zemlje jednaka i iznosi $n_+ = n_- = 6 \cdot 10^8\ m^3$. Ovi joni se kreću brzinom koja zavisi od jačine električnog polja i data je izrazom $v = 1.5 \cdot 10^{-4}\ E$, gdje je v dato u $\frac{m}{s}$, a E u $\frac{V}{m}$.

a) **(2b)** Odredite površinsku gustoću naboja na površini Zemlje.
b) **(4b)** Koliko vremena je potrebno da joni iz atmosfere neutrališu pola naboja na površini Zemlje?

Problem 7 – Neelastični STR (5b)

Čestica mase m kreće se brzinom $v = \frac{4}{5}c$ i sudara se neelastično sa istom česticom koja miruje.

a) **(2.5b)** Odredite brzinu kojom se kreće novonastala čestica.
b) **(2.5b)** Kolika je masa novonastale čestice?

Da li je moguće da zakon očuvanja energije kod neelastičnog sudara za čestice ne vrijedi?
U sudaru se ne javljaju nikakva pobuđenja, emisije zračenja ili slično.

Problem 8 – EMI oscilacije (6b)

Pretpostavimo da u magnetnom polju indukcije B osciluje matematičko klatno koje je napravljeno od provodne žice dužine L, koja ima zanemariv otpor i masu. Na žicu je zakačena kuglica (smatramo je tačkastim tijelom) mase $m = 1kg$. Vektor indukcije magnetnog polja okomit je na ravan oscilovanja klatna. Na klatno je pažljivo priključena sijalica koja radi samo kada je priključena na naizmjeničnu struju frekvencije $f = 50\,Hz$ i efektivnog napona $U = 220\,V$. U početnom trenutku kuglica se otkloni iz ravnotežnog položaja za ugao $\varphi_0 = 0.1\,rad$.

a) **(1b)** Kolika treba biti dužina žice da bi frekvencija oscilovanja matematičkog klatna bila $f = 50Hz$ ako klatno osciluje u gravitacionom polju zemlje $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$?
b) **(3.5b)** Kolika treba biti indukcija magnetnog polja B da bi efektivni napon indukovane elektromotorne sile bio $U = 220V$? Da li je moguće imati ovakvo klatno?
c) **(1.5b)** Koliko će energije potošiti sijalica nakon dovoljno dugo vremena? Da li je moguće da sijalica uopće svijetli?

Problem 9 – Doppler (6b)

Doplerov efekat za izvor koji se kreće u odnosu na stacionarnog posmatrača dat je izrazom:

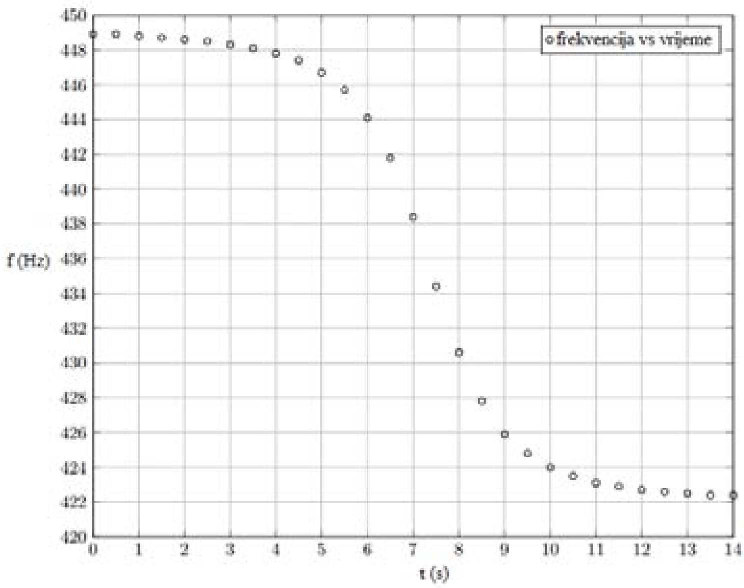
$$f = \frac{f_0}{1 - \left(\frac{v}{c}\right) cos\theta}$$

gdje je f frekvencija koju mjeri posmatrač, f_0 frekvencija koju emituje izvor, v brzina izvora, c brzina talasa, a θ ugao između vektora brzine izvora i linije koja spaja izvor sa posmatračem. ($\theta = 0$ ako se izvor kreće direkno prema posmatraču i $\theta = \pi$ ako se izvor udaljava direktno od posmatrača.)

Izvor zvuka konstantne frekvencije se kreće konstantnom brzinom prema posmatraču, prolazi pored njega te se nastavlja kretati istom brzinom. Frekvencija koju posmatrač mjeri tokom vremena data je na **Slici 6.**

Eksperiment je vršen na sobnoj temperaturi gdje je brzina zvuka 340 $\frac{m}{s}$.

a) **(2.5b)** Kolika je brzina izvora?
b) **(3.5b)** Koja je najmanja udaljenosti između izvora i posmatrača?



Slika 6

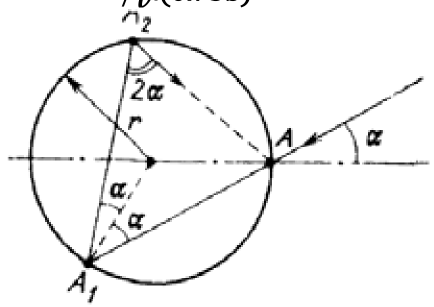
Napomene:

- **Vrijeme izrade testa je 4h.**
- **Ukupan broj bodova na testu je 50.**
- **NE POČINJITE dva različita zadatka na istom papiru.**
- **Dozvoljeno je pisati običnom olovkom.**
- **SRETNO!**

Problem 1 – Nestašna loptica (5.5b)

Na slici **R1.1** je prikazana trajektorija loptice (pogled odozgo). Zbog toga što je trenje zanemarivo i sudari sa podom cilindra i zidovima cilinda su apsolutno elastični, horizontalna komponenta brzine loptice ostaje nepromjenjena i iznosi v. Horizontalne udaljenosti između dva uzastopna sudara su $\boldsymbol{AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots 2\, r\, cos\alpha}$.**(0.75b)** Vrijeme između dva uzastopna sudara je

$\boldsymbol{t_1} = {}^{\boldsymbol{2r\, cos\alpha}}/_{\boldsymbol{v}}$.**(0.75b)**



Vertikalna komponenta brzine ostaje nepromjenjena prilikom sudara loptice sa zidom dok prilikom sudara sa podom vretikalna brzina kuglice mijenja znak.
Vertikalna brzina loptice neposredno prije prvog sudara sa podom je $\boldsymbol{v = \sqrt{2gH}}$ i vrijeme potrebno da loptica padne sa vrha cilinda do dna je $\boldsymbol{t_2} = \sqrt{{}^{\boldsymbol{2H}}/_{\boldsymbol{g}}}$.**(0.5b)**
Da bi loptica izašla iz cilindra potrebno je da u trenutku "udara" o zid cilindra loptica bude na maksimalnoj visini svoje putanje $\boldsymbol{n\, t_1 = 2k\, t_2}$, gdje su $\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{k}$ međusobno prosti cijeli brojevi.(**1.5b)**
Uvrštavanjem izraza za $\boldsymbol{t_1}$ i $\boldsymbol{t_2}$ u prethodnu jednačinu konačno dobijamo:

$$\frac{\boldsymbol{nrcos\alpha}}{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{k}\sqrt{\frac{\boldsymbol{2H}}{\boldsymbol{g}}}\,(2\boldsymbol{b})$$

Problem 2 – Čudna gravitacija (5b)

a) Na osnovu drugog Keplerovog zakona imamo:

$$T_0 = k\pi ab = k\pi R^2 \sin\theta\ (\mathbf{0.5})$$

gdje je k konstanta proporcionalnosti između perioda kretanja i površine koju prebriše vektor položaja.

Označimo vrijeme leta sa T, ovo vrijeme je proporcionalno površini koju prebriše vektor položaja idući iz tačke L u tačku T:

$$T = kA = k\frac{1}{2}R^2(\sin 2\theta + \pi\sin\theta)(\mathbf{1.5}\boldsymbol{b})$$

Uvrstimo sada konstantu proporcionalnosti k

$$T = T_0\frac{\frac{1}{2}R^2(\sin 2\theta + \pi\sin\theta)}{\pi R^2\sin\theta}\,(\mathbf{0.5}\boldsymbol{b})$$

Nakon kraćeg proračuna, konačno imamo da je

$$T = T_0\left(\frac{1}{\pi}\cos\theta + \frac{1}{2}\right)(\mathbf{0.5}\boldsymbol{b})$$

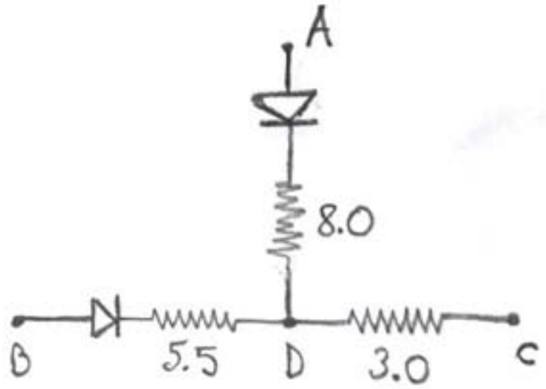
b) Sada možemo primjeniti izraz koji smo dobili u dijelu zadatka pod a). Obzirom da se tijelo ispali vertikalno naviše onda je θ=0.
Tako da imamo

$$T = T_0\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)(\mathbf{2.5}\boldsymbol{b})$$

Ovdje, zapravo, imamo specijalni slučaj elipse, tj. pravu. Fokusi ovakve elipse nalaze se na krajevima prave. Dakle, jedan fokus nalazi se u centru planete, a drugi na maksimalnoj visini koju dostigne tijelo. Kako je dužina velike ose elipse 2R, tijelo dostiže maksimalnu visinu koja iznosi R u odnosu na površinu planete.

Problem 3 – Crna kutija (5b)

Raspored elemenata unutar crne kutije dat je na slici:



Vrijednosti otpora se mogu dobiti primjenjujući Ohmove zakone za pojedinačna mjerenja. Beskonačnosti koje smo dobili u mjerenjima služe da odredimo orjentaciju idealnih dioda. Dobra orjentacija jedne diode nosi jedan bod, dok svaki izračunati otpor donosi još jedan bod. Ukupno dobijamo 5 bodova za ovaj problem.

Problem 4 – TD oscilacije (6b)

Jednačina kretanja klipa kada se otkloni za malu udaljenost x od ravnotežnog položaja:

$$m\ddot{x} = -kx - PA + mg(\mathbf{1.5b})$$

gdje je P pritisak gasa dat na osnovu razmatranja adijabatskog procesa

$$P = \frac{P_0 V_0^{\gamma}}{V^{\gamma}} = \frac{P_0 V_0^{\gamma}}{(V_0 - Ax)^{\gamma}} = \frac{P_0}{\left(1 - \frac{Ax}{V_0}\right)^{\gamma}}$$

Kako je Ax<<V_0 tada možemo pisati da je

$$P \approx P_0\left(1 + \gamma \frac{Ax}{V_0}\right)(\mathbf{1b})$$

tako da imamo

$$m\ddot{x} \approx -kx - P_0 A\left(1 + \gamma \frac{Ax}{V_0}\right) + mg$$

$$m\ddot{x} = -\left(k + P_0 A\left(\gamma \frac{A}{V_0}\right)\right)x(\mathbf{0.5b})$$

gdje smo iskoristili uslov ravnoteže

$$mg = P_0 A(\mathbf{0.5b})$$

$$m\ddot{x} = -\left(\frac{mgA}{V_0} + \frac{mg}{A}A\left(\gamma \frac{A}{V_0}\right)\right)x$$

$$m\ddot{x} + (1+\gamma)\frac{mgA}{V_0}x = 0(\mathbf{1b})$$

Frekvencija malih oscilacija iznosi **(1b)**

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(1+\gamma)\frac{gA}{V_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(1+\gamma)\frac{mg^2}{nRT_0}}$$

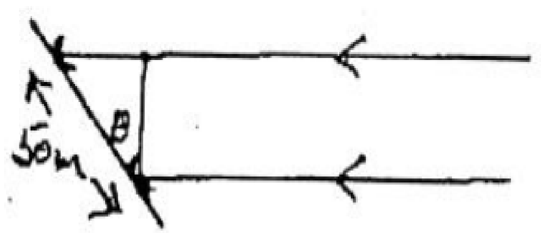
Numerička vrijednost:

$$f = 0{,}114\ Hz(\mathbf{0.5b})$$

Problem 5 – Sunčevi signali (5b)

a) Ako se teleskop pomjeri za ugao θ putna razlika koja proizvodi interferenciju iznosi

$$\Delta = nd\sin\theta\ (\mathbf{1b})$$



gdje je d=50 m.**(0.5b)**

Nulti maksimum, najveći intenzitet sa slike, proizveden je za θ=0, tačno u podne.

Za prvi maksimum imamo konstruktivan uslov interferencije reda n=1:

$$d\sin\theta = \lambda(\mathbf{0.5b})$$

$$\theta \approx \frac{3}{200}\ radijana$$

Obzirom da je period rotacije Zemlje oko vlastite ose rotacije 24 sata, vremenski interval između susjednih maksimuma dat je sa

$$t = \frac{3 * (24) * 60}{(200) * 2\pi} = 3{,}438\ minuta$$

Odnosno $t = 3$ minute i 26 $sekundi$ **(1.5b)**

b) Amplituda zračenja će se umanjiti za cos 43.43. To znači da će intenzitet biti umanjen za faktor:
(cos 43.43^0)^2=0.53.**(1.5b)**

Problem 6 – Pražnjenje Zemlje (6b)

a) Kako Zemljinu površinu možemo aproksimirati provodnikom, koristit ćemo Gaussov zakon da odredimo površinsku gustoću naboja: **(2b)**

$$\sigma = \varepsilon_0 E = 1.33 \cdot 10^{-9}\frac{C}{m^2}$$

b) Gustoća struje nastala kretanjem jona jednaka je:

$$j = nev = 1.5 \cdot 10^{-4} ne\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(\mathbf{1b})$$

Zbog smjera polja samo pozitivni joni imaju smjer kretanja prema Zemlji.
Gustoća struje se također može napisati kao:

$$j = \frac{d\sigma}{dt}(\mathbf{1b})$$

Kombinovanjem gornjih relacija dobijamo izraz:

$$\frac{d\sigma}{dt} = 1.5 \cdot 10^{-4} ne\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Ili

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = 1.5 \cdot 10^{-4} ne\frac{dt}{\varepsilon_0}(\mathbf{1b})$$

Što predstavlja jednačinu radioaktivnog raspada. Rješenje ove jednačine je dobro poznata eksponencijalna funkcija:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-kt}$$

gdje je $k = 1.5 \cdot 10^{-4}\frac{ne}{\varepsilon_0}$.

Dobija se da je vrijeme potrebno za neutralisanje pola površinskog naboja na Zemlji: **(1b)**

$$t = \frac{ln2}{k} = 886.66\ s$$

Problem 7 – Neelastični STR (5b)

Primijenit ćemo zakone očuvanja impulsa i energije. Redom napisani:

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \frac{m'v'}{\sqrt{1 - (\frac{v'}{c})^2}}(\mathbf{2b})$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} + mc^2 = \frac{m'c^2}{\sqrt{1-(\frac{v'}{c})^2}} (2b)$$

gdje su m, v masa i brzina upadne čestice i čestice koja miruje, a m', v' odnose se na novonastalu česticu.

Gornje jednačine predstavljaju sistem od dvije jednačine sa dvije nepoznate, koji se rješava jednostavnom smjenom i dobijamo:

$$v' = \frac{c}{2}(\mathbf{0.5b})$$

$$m' = \frac{4}{\sqrt{3}}m(\mathbf{0.5b})$$

Problem 8 – EMI oscilacije (6b)

a) Izraz za frekvenciju matematičkog klatna je:

$$\boldsymbol{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}(0.5b)}$$

I ovoga dobijamo da bi dužina žice trebala biti:

$$\boldsymbol{L = \frac{g}{4\pi^2 f^2} = 99,39\mu m(0.5b)}$$

(Što je nemoguće…)

b) Indukovanu EMS pišemo kao:

$$\boldsymbol{\varepsilon = -B\frac{L^2}{2}\frac{d\varphi}{dt}(1b)}$$

Kod matematičkog klatna imamo:

$$\boldsymbol{\varphi = \varphi_0 \cos \omega t\,(0.5b)}$$

Gdje je $\omega = \sqrt{\frac{L}{g}}$

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{B\varphi_0\sqrt{L^3 g}}{2}(0.5b)}$$

Efektivna vrijednost napona je $\boldsymbol{U = \frac{\varepsilon_{max}}{\sqrt{2}}(0.5b)}$.

Konačno možemo napisati izraz za indukciju magnetnog polja:

$$\boldsymbol{B = \frac{2\sqrt{2}U}{\varphi_0\sqrt{L^3 g}} = 2\cdot 10^9 T(1b)}$$

Što je preveliko, radi usporedbemu CERN-u za ubrzavanje čestica koriste jačinu magnetne indukcije oko 5.5T, što je opet prevelika veličina. Dakle, nije moguće imati ovakvo klatno.

c) Energija koju će sijalica potrošiti je ustvari ukupna mehaniča energija koju posjeduje matematičko klatno na samom početku kretanja**(1b),** a to možemo napisati kao:

$$\boldsymbol{Q = mgl(1-cos\varphi_0)}$$
$$\boldsymbol{\approx 4,87\cdot 10^{-6}J(0.5b)}$$

Što je premala količina energije, dakle, sijalica ne bi ni svjetlila u ovom slučaju.

Problem 9 – Doppler (6b)

a) Za $\boldsymbol{\theta = 0}$ jednačina postaje:

$$\boldsymbol{f_a = \frac{f_0}{1-\left(\frac{v}{c}\right)}(0.5b)}$$

I za $\boldsymbol{\theta = \pi}$: $\boldsymbol{f_b = \frac{f_0}{1+\left(\frac{v}{c}\right)}(0.5b)}$

Gdje su f_a i f_b frekvencije izmjerene na početku i na kraju grafika, prije i poslije prolaska izvora pored posmatrača.

Za $v \ll c$ jednačina se može aproksimirati kao

$$\boldsymbol{\frac{f_a}{f_b} = 1 + 2\frac{v}{c}(1b + 0.5b\,rez)}$$

b) Pretpostavimo da je d udaljenost (fiksirana) između linije putanje izvora i posmatrača. Neka je x pomak po toj liniji, za $x = 0$ udaljenost između posmatrača i izvora je minimalna. Onda za $|x| \ll d$

$$\boldsymbol{cos\theta \approx cot\theta = x/d(0.5b)}$$

$$\boldsymbol{f = \frac{f_0}{1-\left(\frac{v}{c}\right)\left(\frac{x}{d}\right)}(0.5b)}$$

$$\boldsymbol{f \approx f_0\left(1+\left(\frac{v}{c}\right)\left(\frac{x}{d}\right)\right)(1b)}$$

Pronađimo izvod po vremena ove funkcije pod pretpostavkom da je $x' = v$:

$$\boldsymbol{f' = f_0\left(\frac{v^2}{c}\right)d(0.5b)}$$

f' se može očitati sa grafika$\boldsymbol{(0.5b)}$ tako što se posmatra nagib na centralnom dijelu.

Nakon izračunavanja dobiju se vrijednosti $\boldsymbol{v = 10.66\frac{m}{s}}$, $\boldsymbol{d = 17.76\,m}$, i $\boldsymbol{f = 435.19Hz.\,(rez\;0.5b)}$